సారసంగ్రహ గణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

ప్రథమభాగము

పరికర్మభిన్నగణితములు

వ్యాఖ్యాత

ఆచార్య పి.వి.అరుణాచలం

శ్రీవేంకటేశ్వర ప్రాచ్యపరిశోధనాలయములో ఆంధ్రవాఙ్మయ పరిశోధకుడగు

శ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిచే పరిశోధింపబడినది

తిరుమల తిరుపతి దేవస్థానములు, తిరుపతి

2023

SARASANGRAHA GANITAMU

(Pavuluri Mallana)

Commentry By
Prof. P.V. Arunachalam

T.T.D. Religious Publications Series No.1441

@ All Rights Reserved

First Edition : 2023

Copies : 300

Published by :
Sri A.V. Dharma Reddy, IDES
Executive Officer,
Tirumala Tirupati Devasthanams,
Tirupati - 517 507

D.T.P.
Publications Division,
T.T.D, Tirupati

Printed at
Tirumala Tirupati Devasthanam's Press
Tirupati - 517 501

ముందుమాట

ప్రాచీన భారతదేశంలో పండితులు గణితశాస్త్రంలో పాండిత్యాన్ని గడించినా, దానితోపాటు జ్యోతిశ్శాస్త్రంలోగాని, ఖగోళశాస్త్రంలోగాని ప్రవేశించి బాగా పాండిత్యం గడించేవారు. ఆర్యభట్టు, బ్రహ్మగుప్తుడు, వరాహమిహిరుడు మున్నగువారు గణితశాస్త్రంతోపాటు, జ్యోతిష, ఖగోళశాస్త్రాల్లో ఎనలేని ఖ్యాతిని గడించారు. వీరంతా ఉత్తరభారతానికి చెందినవారు కాగా ప్రఖ్యాత గణితశాస్త్ర పండితులు ఉత్తరభారతంతోపాటు, దక్షిణభారతంలోనూ విలసిల్లారని, గణిత సంస్కృతి, విశుద్ధ గణితసంస్కృతి దక్షిణభారతంలో కూడా విలసిల్లిందని పేర్కొనేందుకు నిదర్శనమే శ్రీమహావీరాచార్యుడు.

శ్రీమహావీరాచార్యుడు జ్యోతిశ్శాస్త్రంతోగాని, ఖగోళశాస్త్రంతోగాని పరిచయం కూడాలేని, కేవలం గణితశాస్త్ర విద్వాంసులుగా ప్రఖ్యాతి గాంచడం విశేషం. ఈయన దక్షిణభారతదేశంలోని కర్ణాటకప్రాంతానికి చెందినవారు కావడం మరో విశేషం. క్రీ.శ. 9వ శతాబ్దంలో కర్ణాటకరాజ్యాన్ని రాష్ట్రకూట ప్రభువు అమోఘ వర్షనృపతుంగుడు పరిపాలించాడు. అతని ఆస్థానంలో మహావీరాచార్యుడు గణితాచార్యునిగా బాధ్యతలు నిర్వహించాడు. ఈయన సంస్కృతంలో 'గణిత సంగ్రహసారము' అనే గ్రంథాన్ని వెలువరించాడు. ఈ గ్రంథం భారతీయ గణితశాస్త్ర ప్రస్థానంలో ఒక మైలురాయి. అప్పటిదాకా చెదురుమొదురుగా ఉన్న గణితసామగ్రిని సేకరించి, వర్గీకరించి 'గణితసంగ్రహసారము' అనే గ్రంథరూపంలో వెలువరించిన మహనీయుడు శ్రీ మహావీరాచార్యుడు.

ఈ గ్రంథాన్ని ఆధారంగా తీసుకొని క్రీ.శ. 11వ శతాబ్దానికి చెందిన పావులూరి మల్లన "సారసంగ్రహగణితము" అనే పేరుతో తెలుగులో పద్యరూపంలో స్వేచ్ఛానువాదం చేశాడు. మల్లన తన అనువాదాన్ని యథాతథంగా కాకుండా ఔచిత్యాన్ని పాటిస్తూ స్వేచ్ఛగా అనువదించాడు.

ఆరుద్రగారు పేర్కొన్నట్లు ఈ రచయిత అనువాదంలో పారతంత్ర్యంలో, స్వాతంత్ర్యాన్ని పాటించాడు.

తెలుగు పద్యాలలోనికి అనువదింపబడిన మొట్టమొదటి గణితశాస్త్రగ్రంథం ఈ "సారసంగ్రహగణితము". దీన్ని శ్రీవేంకటేశ్వర ప్రాచ్యపరిశోధనాలయంలో ఆంధ్రవాఙ్మయ పరిశోధకుడుగా బాధ్యతలు నిర్వహించిన బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారు పరిశోధించి, పరిష్కరించగా 1952లో తిరుమల తిరుపతి దేవస్థానములు ఈ గ్రంథాన్ని మొదటిసారి ముద్రించింది.

కేవలం పద్యరూపంలో ఉన్న "సారసంగ్రహగణితా"న్ని ప్రస్తుత సమాజం అర్థంచేసుకోవడం కష్టం. ఈ విషయాన్ని గుర్తించి పావులూరి మల్లన 'సారసంగ్రహగణితము'లోని పద్యాలకు ప్రసిద్ధ గణితశాస్త్ర ఆచార్యులైన ఆచార్య పి.వి.అరుణాచలం గారిచే వ్యాఖ్యానరూపంలో తాత్పర్యాలను వ్రాయించి ప్రస్తుత గ్రంథరూపంలో తి.తి.దే. పాఠకలోకానికి అందిస్తున్నది. ఈ గ్రంథం మన ప్రాచీన గణితశాస్త్ర విశిష్టతను, నేటి సమాజానికి తెలియజేయడమే గాక, నేటి గణిత విద్యార్థులకు ఎంతో ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

గణితశాస్త్రంలోని అనేక చిక్కులకు సమాధానం చెప్పగల ఈ పావులూరి మల్లన "సారసంగ్రహగణితా"న్ని, పాఠకలోకం ఆదరిస్తుందని తద్వారా భారతీయ గణితశాస్త్ర విశిష్టతను తెలుసుకుంటుందని భావిస్తున్నాము.

సదా శ్రీవారి సేవలో...

శ్రీకార్యనిర్వహణాధికారి

తిరుమల తిరుపతి దేవస్థానములు,

తిరుపతి.

పీఠిక

సమాజం ఎల్లప్పుడు స్మరించుకోవలసిన మహానుభావులలో కీ.శే. బ్రహ్మ శ్రీవేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారు మొదటిపంక్తిలో ఉంటారు. "యోగంతో చిత్తాన్ని, పదశాస్త్రంతో భాషను, వైద్యశాస్త్రంతో దేహాన్ని పరిపూతం చేసిన పతంజలి వంటి మహనీయులు వేటూరిప్రభాకరులు. భాషా, సాహిత్యచరిత్ర, పురాతత్త్వ, శాసన, ఖగోళ, వైద్య, యోగశాస్త్రాలలో గంభీరమైన లోచూపుతో దైవికమైన ఉపజ్ఞతో కలం పట్టినప్పుడల్లా కలకాలం నిలిచే కటికసత్యాలు వ్రాసిన నిష్ఠాగరిష్ఠులు" అని శ్రీవేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిని గురించి ప్రసిద్ధరచయిత డా॥ తిరుమల రామచంద్రగారు అన్నారు.

"మూడు మూర్తులా ఆయన పరిశోధకుడు; మూర్తీభవించిన పరిశోధన ఆయన" అని శ్రీమల్లంపల్లి సోమశేఖరశర్మగారు అన్నారు.

శ్రీప్రభాకరశాస్త్రులు వివిధ గ్రంథాలకు వ్రాసిన వ్యాఖ్యలు, పీఠికలు వారి వాఙ్మయవైదుష్యానికి నిలువుటద్దాలు. ఈ పీఠికలను చదివి శ్రీవిశ్వనాథ సత్యనారాయణగారు.

"వేటూరి వారి వ్యాఖ్యలున్, పీఠికలున్ దెనుగుంబొలతికిన్

బేటులురేగు గందవొడి వెట్టినపూతలు" అని ప్రశంసించారు." కావ్యగతమైనశైలి, ఔచిత్యం, లోకోక్తులు, విశిష్టపదప్రయోగం, ఛందోవైవిధ్యం – ఇత్యాదిగా గల విషయాలన్నీ కూలంకషంగా పరిశీలించి వారు తమ అభిప్రాయాన్ని నిష్కర్షగా వక్కాణించేవారు. తలస్పర్శి అయిన పాండిత్యం, విషయంపట్ల నిశితమైన అవగాహన ఉంటే తప్ప ఆ స్థాయిలో గ్రంథవిమర్శలు సాగించడం సాధ్యంకాదు అంటారు డా॥ సముద్రాల లక్ష్మణయ్యగారు.

నాటి సంయుక్త మదరాసు రాష్ట్రంలోనే కాదు, దానిని పరివేష్టించిన ప్రాంతాలలో కూడా బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారి పేరు విననివారు లేరంటే అతిశయోక్తి కాదు. తెలుగు నేలపై సర్వసంపన్నమైన సాహిత్యవిమర్శకు,

శాస్త్రీయమైన పరిశోధనా సంస్కృతికి మల్లెపందిళ్ళు కట్టిన మహనీయులు శ్రీశాస్త్రిగారు. ఆంధ్రదేశంలో ఉత్తమతరగతికి చెందిన బహుముఖ ప్రజ్ఞాశాలురలో, వ్రేళ్ళమీద లెక్కింపదగిన వారిలో శ్రీప్రభాకరశాస్త్రిగారు అగ్రశ్రేణిలో ఉంటారు. వారు సాహిత్యపరంగా, భాషావిషయకంగా, చారిత్రక విషయాలమీద, చేసిన పరిశోధనలు, సాధించిన విజయాలు జగద్విదితాలు.

ఆచార్య వేటూరి ఆనందమూర్తి గారన్నట్లు "లోకంలో ఎందరో గొప్ప పండితులున్నారు; సరసకవులున్నారు; ప్రసిద్ధ పరిశోధకులున్నారు; భాషాభిజ్ఞులున్నారు; విమర్శ విశారదులున్నారు; సాహిత్య చరిత్ర కారులున్నారు; సంఘసంస్కర్తలున్నారు; ఉదార చరితులున్నారు; మానవతా ప్రపూర్ణులున్నారు; మహాయోగులున్నారు; వారిలో చాలామంది ఎవరిరంగంలో వారుగా ప్రసిద్ధికెక్కిన వారే అధికం. కాని ఇలాంటి అన్ని రంగాలలోనూ ఒక్కరే మిన్నగా ఉండడమన్నది చాలా అరుదైన సన్నివేశం. అలాంటి బహుముఖీనమైన ప్రజ్ఞాపాటవాలున్న చాల కొద్దిమందిలో ప్రభాకరశాస్త్రిగారు ప్రాగ్రసరులు" – వీరిని పాశ్చాత్యులలో ప్రసిద్ధుడైన లియో నార్డో డా విన్సీ (Leonardo da Vinci) జతకట్టవచ్చు. సాహిత్యం, పరిశోధనలు అటు ఉంచి ప్రదర్శనశాలలు (మ్యూజియములు) ఏర్పాటు చేయటంలో శ్రీవేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రి కృషి బహుధా శ్లాఘనీయము. వేలకొలది తాళపత్ర గ్రంథాలను సేకరించారు, శాసన సాహిత్యాన్ని పరిశీలించి, పరిశోధించి అందరి విషయాలను వెలుగులోకి తెచ్చారు తన రచనల ద్వారా. పూజ్యులు శ్రీశాస్త్రిగారు చరిత్ర పూర్వయుగపునాటి సమాధులను త్రవ్వించి అన్వేషించిన విషయం చాలమందికి తెలియకపోవచ్చు.

గాంధీమహాత్ముడు జాతీయ రంగంపై అడుగుపెట్టినది మొదలు, శ్రీశాస్త్రిగారు గాంధీజీని ఎంతగానో ఆరాధించారు. శ్రీశాస్త్రిగారిని గురించి రాస్తూ శ్రీ పి.చెంచయ్యగారు అన్నారు. "He is a follower of Mahatma Gandhi, sincere and devout.

బాపూజీ, 1924లో ఇరువది ఒక్కరోజులు కఠోరమైన ఉపవాసం చేస్తున్నప్పుడు శ్రీశాస్త్రిగారు, తల్లడిల్లిపోయారు. పద్యాలలో వారి ఆర్తిని బహిర్గతం చేశారు. వాటిలో మచ్చుకు ఒక పద్యం చూడండి.

"అయ్యయ్యో! ఇది యేమి కర్మము మహాత్మా! ధర్మనిర్మూలకుల్
కొయ్యల్ కొందరు చేయు దుండగములన్ కూలార్పగా నిత్తరిన్
ముయ్యేళ్నాళ్ళుపవాసముండెదరటేమో! డెందమాందోళితం
బయ్యెన్, మీమది నేమిదోచెనో! భవిష్యంబింకనెట్లున్నదో"

బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారు, కుంభకోణములో వారి గురువరేణ్యులైన శ్రీమాస్టర్ సి.వి.వి.గారి దగ్గర దివ్యోపదేశం పొందిన తరువాత, ఆ మాస్టర్ యోగమార్గాన ఎన్నో దివ్యానుభూతులను పొందుతూ, అదే వారి జీవితలక్ష్యంగాను, పరమార్థంగాను భావించి యోగసాధనలోనే తమ ఐహికాన్ని గడుపుతూ వచ్చారు యోగవిద్యద్వారా ఎందరెందరికో ఆరోగ్యదానంచేసి, వారిని ఆదుకొన్న మహనీయులు శ్రీశాస్త్రిగారు. ఆంధ్రదేశంలో వీరి యోగచికిత్స మూలంగా ఈ మాస్టర్ యోగసంప్రదాయానికి (భృక్తరహిత తారకరాజయోగ సాధన) విశేష వ్యాప్తి కలిగింది. ఈనాటికీ తెలుగుదేశంలో తిరుపతి, గుంటూరు, విశాఖపట్టణం, హైదరాబాదు వంటి నగరాలలో యోగమిత్రులు సమావేశమవుతూ ఆరోగ్యలబ్ధిని పొందుతూ ఉండటం గమనింపదగినవిశేషం.

శ్రీప్రభాకరశాస్త్రిగారు 1888 ఫిబ్రవరి 7వ తేదీన కృష్ణాజిల్లా దివితాలూకా పెదకళ్ళేపల్లి గ్రామంలో జన్మించారు. వీరితల్లి శ్రీమతి శేషమ్మగారు, తండ్రి శ్రీసుందరశాస్త్రిగారు.

"కర్మయోగి, కళాతపస్వి అయిన ప్రభాకరులు అనునిత్యము జగద్ధితమును, వాఙ్మయాభ్యుదయమును కాంక్షించుచు, 1950 ఆగస్టు 29వ నాడు తుదిశ్వాస విడుచువరకు తపోమూర్తులై విరాజిల్లిరి.

II

శ్రీప్రభాకరశాస్త్రిగారు తన పదునెనిమిదవఏట క్రీ.శ. 1906లో మదరాసు రావడం జరిగింది. ఇది వారి జీవితంలో ఒక ప్రధానమైన మలుపు. ఏ రంగంలోనైనా రాణించాలనుకొన్న వారికందరికీ ఆనాడు మదరాసు "ఒక కూడలి కేంద్రం, ఒక కార్యాచరణక్షేత్రం, విజయసాధనకు నిలయం." మదరాసుచేరిన కొద్ది రోజులలోనే శ్రీశాస్త్రిగారికి, ఆ రోజుల్లో ప్రఖ్యాతులైన న్యాయవాది శ్రీవేపారామేశంగారితో మంచి పరిచయం ఏర్పడింది. శ్రీరామేశంగారు తెలుగువారు, గర్వించదగ్గ జాతిరత్నం. వారొక సంచార విజ్ఞాన సర్వస్వం. వారు వృత్తిపరంగా న్యాయశాస్త్రంలో నిష్ణాతులు. ఆపైన ఖగోళ, గణిత, చరిత్రాది బహుశాస్త్రాల్లో కోవిదులు. అట్టి మహనీయుని సాహచర్యంతో శ్రీప్రభాకర శాస్త్రిగారికి గణిత, ఖగోళశాస్త్రాలమీద మంచి పట్టు లభించింది. శ్రీవేపారామేశంగారి బైనాక్యులర్ సహాయంతో దక్షిణ భారతదేశంలో తొలిసారిగా "హేలీ" తోకచుక్కను గుర్తించిన అపూర్వ విజ్ఞానవేత్త శ్రీశాస్త్రిగారు.

క్రీ.శ. 1913లో శ్రీశాస్త్రిగారు తొలి పర్యాయం శ్రీమానవల్లి రామకృష్ణ కవిగారితో కలిసి ద్రవిడదేశ పర్యటన ప్రారంభించినారు. ఇది వినోద యాత్ర కాదు. ప్రాచీన గ్రంథసేకరణార్థం బయలుదేరారు. ఈ పర్యటన ఫలమే భాసనాటక చక్రప్రకాశనం. ఈ రోజుల్లోనే పావులూరి మల్లనను గురించిన ప్రస్తావన ఒకపెద్ద చర్చగా చెలరేగింది. లబ్ధప్రతిష్ఠులైన శ్రీకందుకూరి వీరేశలింగంతో శ్రీశాస్త్రిగారు శాస్త్రవిషయకమైన వివాదాలకు దిగవలసివచ్చింది. మల్లనను, నన్నయను సమకాలికుడుగా నిర్ణయించారు శ్రీకందుకూరి వీరేశలింగం పంతులుగారు. ఈ వాదాన్ని పూర్వపక్షం చేసి, "పావులూరి మల్లన నన్నయనాటి మల్లనకు మనుమడని, లైబ్రరీలోని వ్రాతపుస్తకాలను పరిశీలించి, పట్టికలద్వారా నిరూపింపసాగారు శ్రీశాస్త్రిగారు. పెద్దలనేకులు వీరేశలింగంగారి నిర్ణయాన్ని బలపరుస్తూ శ్రీశాస్త్రిగారిపై నిందలు కురిపించారు.

చరిత్రచతురానన బిరుదాంకితులు శ్రీచిలుకూరి వీరభద్రరావుగారు, లైబ్రరీలో పనిచేస్తూ ఒక కుర్రకుంక ప్రభాకరశాస్త్రి ఇష్టము వచ్చినట్లు గ్రంథ విషయములను మార్చి వేయుచున్నాడన్న రీతిని దూయబడుతూ, అతనిని వెంటనే లైబ్రరీ నౌఖరీనుండి తొలగించాలని శాయశక్తులా ప్రయత్నించారు. ఇంకెందరెందరో కటువుగా మందలింపసాగిరి. "శ్రీవీరేశలింగం పంతులుగారి పేరు ప్రతిష్ఠలట్టివి గనక, వారి యాంధ్ర సాహిత్యసేవ అంతమహనీయమైనది గనక, వారెల్లరునట్లుద్రిక్తులైరి." అని ఎంతో సౌమనస్యంతో అన్నారు శ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రిగారు. ఈ వివాదాన్ని చిట్టచివరకు పరిష్కరించి శ్రీప్రభాకరుల వాదమే సమంజసమని తుదితీర్పు నిచ్చిన ధీమంతుడు శ్రీవేపా రామేశంగారు. "స్పర్ధయా వర్ధతే విద్యా" అన్నట్లు ఈ వివాదంలో దిగినందుకు ప్రతిఫలంగా శ్రీశాస్త్రిగారు గణితశాస్త్రంలో కూడా మంచి ప్రవేశం సంపాదించారు. వారు తిరుమల తిరుపతి దేవస్థానంవారి శ్రీవేంకటేశ్వర ప్రాచ్యపరిశోధనాలయంలో వాఙ్మయ పరిశోధకుడుగా ఉండినప్పుడు, మల్లన వ్రాసిన గణిత గ్రంథం – సారసంగ్రహగణితం లభ్యమైనంతవరకు పరిశోధించి శ్రీవేంకటేశ్వర ఓరియంటల్ ప్రచురణ – 38గా వెలువరించడం జరిగింది. దీనితోబాటు ఇతర శాస్త్రగ్రంథాలను కూడా పరిశోధించినారు. ధనుర్విద్యావిలాసం, వృక్షాయుర్వేదం మొదలైన శాస్త్రగ్రంథాలు వెలుగునకు వచ్చాయి శ్రీ శాస్త్రిగారి పూనికతో.

జ్యోతిశ్శాస్త్ర రంగంలోనూ ప్రవేశించినారు శ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రిగారు సలక్షణమైన శాస్త్రజ్ఞానం లోపించడంవల్ల అనేక సందర్భాలలో జ్యోతిశ్శాస్త్రజ్ఞులు, జోస్యములు పరిహాసానికి పాత్రమౌట మనం అందరం ఎరిగిన విషయమే. "జ్యోతిష్కులు సాధారణంగా, గుడ్డివాటముగా ఏవోఫలములను చెప్పుచుందురు. కొన్ని తగులును, కొన్ని తప్పును. తగిలినవానిని బట్టి యద్దిరా శాస్త్రమని విశ్వసించు నల్పసంఖ్యాకులు తనివినందుచుందురు. వాస్తవమున కిట్టిజోస్యము లేకుంటే మేలు" అని నిశ్చితాభిప్రాయం కలిగిన శ్రీశాస్త్రిగారు 1914వ

సంవత్సరం దక్షిణదేశంలో పరిశోధక యాత్ర సాగించినప్పుడు జ్యోతిశ్శాస్త్రానికి సంబంధించిన అద్భుతమైన గ్రంథాలను చూచి ఆశ్చర్యపడినారు. ఇవే నాడీ గ్రంథాలు. ఈ నాడీగ్రంథాలను గురించి ఆంధ్రదేశంలో చాలామందికి తెలియదు. సంస్కృతంలో కొన్ని నాడులున్నప్పటికీ, బహుళంగా తమిళంలో ఈ నాడీగ్రంథాలు ఉండటం శ్రీశాస్త్రిగారి ఆసక్తిని మరింత పెంచింది. "జ్యోతిశ్శాస్త్రమున కప్రామాణ్యము నాపాదించే బుద్ధిమంతులెల్లరు నీగ్రంథముల యద్భుతోత్తర తత్త్వమును చక్కగా బరికింతురుగాక." అని వ్రాశారు శ్రీశాస్త్రిగారు.

ప్రజ్ఞామూర్తులు శ్రీప్రభాకరశాస్త్రులవారు పరిష్కరించి ప్రకటించిన శాస్త్రగ్రంథాలలో సారసంగ్రహగణితం ముఖ్యంగా పేర్కొనదగినది. "మాన్యులు శ్రీకందుకూరి వీరేశలింగంగారు పావులూరి మల్లన కాలనిర్ణయంలోపడిన పొరబాటును ఎత్తిచూపి, మల్లన కాలనిర్ణయం చేయడానికి" శ్రీశాస్త్రిగారు మదరాసు ప్రాచ్యలిఖిత పుస్తకభాండాగారంలోని తాళపత్ర ప్రతులను పరిశీలించవలసి వచ్చినది. ఇట్లా ప్రారంభమైన ఆసక్తి మెల్లగా బలపడి, ఎట్లాగైనా పావులూరి మల్లన గణితాన్ని పరిష్కరించి ప్రకటించాలనే దృఢసంకల్పంగా మారింది. తిరుపతిలో శ్రీవారి కొలువులో చేరిన తరువాత తన పరిశోధనా కార్యవ్యాసంగంలో ఒక అంశంగా ఈ గణిత గ్రంథ ప్రచురణను ఎన్నుకొన్నారు శ్రీశాస్త్రిగారు. అద్భుతమైన విజయం సాధించారు. సాహిత్యరంగంలో, చారిత్రకలోకంలో, శాసనాల ప్రపంచంలో, భాషాశాస్త్ర చర్చలలో, తాళపత్రగ్రంథోద్ధారణలో, తాళ్ళపాక సాహిత్యప్రచారంలో, యోగా భ్యాసంలో, అధ్యాపకత్వం, శిష్యశిక్షణలో, కథాకథనంలో, అనువాద కార్యక్రమంలో, జానపద సాహిత్యసేకరణలో తలమునకలుగా పనిపెట్టుకొని, గణితంలో అద్భుతమైన ఆసక్తిని అలవరచుకొని, అందులో ఒక పరిశోధనా కార్యక్రమాన్ని చేపట్టి విజయవంతంగా ముగింపునకు తీసుకొనిరావడం ఒక ఆషామాషీ పనికాదు.

III

ప్రాచీన భారతదేశంలో గణిత పండితుడంటే జ్యోతిశ్శాస్త్రంలో, ఖగోళశాస్త్రంలో బాగా పరిచయమున్నవాడని అనుకోవాలి.

"వేదాంగ శాస్త్రాణామ్ గణితం మూర్ధని స్థితమ్" అన్న ప్రసిద్ధశ్లోకభాగం కూడా ఈ విషయాన్నే ధ్రువీకరిస్తున్నది. ఆర్యభట్ట, బ్రహ్మగుప్తుడు, వరాహమిహిరుడు, భాస్కరుడు మొదలైనవారంతా జ్యోతిశ్శాస్త్రపారంగతులు, ఖగోళశాస్త్రపండితులుగా ప్రఖ్యాతి గాంచినవారే. అప్పుడప్పుడు జ్యోతిశ్శాస్త్ర సంబంధంలేని గణితభాగాలు స్పృశించినా వారు జ్యోతిశ్శాస్త్రానికే ఎక్కువ ప్రాముఖ్యమిచ్చేవారు.

ప్రాచీన భారతనాగరికతలో గణితశాస్త్ర ప్రస్తావన వస్తే ఏ పాటలీపుత్రమో, ఏ ఉజ్జయినో, ఏ వారణాసినో ప్రముఖ పీఠాలుగా పేర్కొంటారు. దీనికి అపవాదుగా దక్షిణదేశంలోనూ గణితసంస్కృతి, విశుద్ధగణితసంస్కృతి వెల్లివిరిసిందనడానికి మహావీరాచార్యుని ఉదంతం చారిత్రకంగానూ, శాస్త్రపరంగానూ ఒక ప్రత్యేకతను సంతరించుకొన్నది.

జ్యోతిష్కులుగా, ఖగోళశాస్త్ర పండితులుగా ప్రసిద్ధికెక్కిన గణితవేత్తల సరసన ఒక విశుద్ధ గణిత విద్వాంసునిగా విఖ్యాతగాంచిన ప్రత్యేకత మహావీరాచార్యునిది.

క్రీ.శ. తొమ్మిదవ శతాబ్దిలో కర్ణాటక రాజ్యప్రభువు అమోఘ వర్షనృపతుంగుని (క్రీ.శ. 814నుండి క్రీ.శ. 877వరకు పాలించిన చక్రవర్తి) ఆస్థానంలో ఉండిన గణితాచార్యుడు. జైనమతస్థుడైన మహావీరాచార్యుడు. క్రీ.శ. 7వ శతాబ్దిలో ఉండిన మహాగణితవేత్త బ్రహ్మగుప్తునకు, 12వ శతాబ్దిలో భాసించిన గణితాచార్యుడు భాస్కరునకు మధ్య ఒక సుదీర్ఘమైన అంధయుగం ఏర్పడింది. పది, పదునొకండవ శతాబ్దులలో ఉండిన ఒక మోస్తరు గణితపండితులు మంజుల, శ్రీపతి, గోపాల, హేమచంద్ర ప్రభృతులు మినహా చెప్పుకోదగ్గ పెద్దలు కనబడరు ఒక్క మహావీరాచార్యుడు తప్ప. ఈ మహావీరాచార్యుడు సంస్కృతంలో గణిత సారసంగ్రహమనే గ్రంథాన్ని వ్రాశాడు.

దీనిని మూలంగా తీసుకొని, పావులూరి మల్లన స్వేచ్ఛానువాదం సాగించి సారసంగ్రహ గణితమనే గ్రంథాన్ని రూపొందించినాడు. మల్లన తన అనువాదాన్ని మక్కికి మక్కిగా గాక ఔచిత్యాన్ని పాటించి స్వేచ్ఛగా అనువదించాడు. శ్రీఆరుద్రగారన్నట్లు ఈ రచయిత పరతంత్రంగా స్వతంత్రాన్ని పాటించినాడు.

భారతీయ గణితశాస్త్ర ప్రస్థానంలో మహావీరాచార్యుని గణితసంగ్రహసార ఆవిర్భావం ఒక ప్రసిద్ధమైన ఘట్టం, అప్పటికి చెదురుమదురుగా ఉన్న గణిత సామగ్రిని సేకరించి, దానిని వర్గీకరించి గ్రంథరూపంలో వెలువరించి, గణితానికి పెద్దపీటవేసిన మహనీయుడు మహావీరాచార్యుడు. మహావీరాచార్యుని కృతి అన్ని ప్రాచీన భారతీయ గణిత గ్రంథాలకంటే పెద్దది. మొత్తం 1131 శ్లోకాలతో, దాదాపు 1000 సమస్యలతో కూర్పబడ్డ అసలుసిసలైన గణితశాస్త్ర గ్రంథం ఇది.

ప్రవేశిక, ప్రాథమిక అంకగణితం, భిన్నాంక పరిక్రియలు వివిధ ప్రకీర్ణ సమస్యలు, త్రైరాశికప్రక్రియ, మిశ్రగణితం, క్షేత్రగణితం, వ్యవహార గణితం (త్రవ్వకాలకు సంబంధించిన గణితం), నీడలు, కొలతలు అని తొమ్మిది అధ్యాయాలుగా (మనోరంజనీ వ్యాఖ్య) రూపందుకొన్న గ్రంథం. మహావీరాచార్యునికి ముందుతరాల వారందరూ గణితాన్ని ఖగోళశాస్త్రాధ్యయనానికి ఉపయుక్తమయ్యే విజ్ఞానంగా భావించి గణితశాస్త్ర రచనలు కొనసాగించారు. మహావీరాచార్యుడు ప్రప్రథమంగా గణితాన్ని గణితంగా పరిగణించిన ప్రతిభా సంపన్నుడు. అందువల్లే ఈతని రచనకు ఒక ప్రత్యేకత, ఒక విశిష్టత చేకూరింది.

"కించిదుద్ధృత్యతత్సారం వక్ష్యేఽహం మతిశక్తితః ।
అల్పగ్రంథ మనల్పార్థం గణితం సారసంగ్రహమ్ ॥

"అనంతంగా విస్తరించి ఉన్న గణితసముద్రంలో మునకలు వేసి ఏవో కొన్ని రత్నాలు సేకరించగలిగాను. నాకున్న జ్ఞానపరిధిలో అనల్పమైన గణితసారాన్ని నా ఈ అల్పగ్రంథంగా సమకూర్చాను."

ప్రాచీన భారతీయ గణితంలో విశుద్ధగణిత గ్రంథాలు మూడే కనిపిస్తాయి. ఒక బక్షాళీ తాళపత్రగ్రంథం, త్రిశతి, గణితసారసంగ్రహం – వీటిలో మొదటిది క్రీస్తు శకారంభకాలంనాటిది, రెండవది, శ్రీధరాచార్యుని త్రిశతిక. శ్రీధరాచార్యుడు తొమ్మిది – పది శతాబ్దాలనాటి పండితుడంటారు కొందరు – కాదు ఇంకా రెండు శతాబ్దాల పూర్వం ఉండిన వాడంటారు మరికొందరు.

IV

మొట్టమొదట క్రీ.శ. 1912లో శ్రీ ఎం.రంగాచార్యులు, మహావీరాచార్యుని గణిత సారసంగ్రహాన్ని సంస్కృతంనుండి ఆంగ్లంలోకి అనువదించారు. ఆరోజులలోనే విశాఖపట్నంలో శ్రీ S.P.L. నరసింహస్వామిగారు పావులూరి మల్లన సారసంగ్రహగణితం తాలూకు రాతప్రతుల్ని సేకరించడం జరిగింది. మల్లనగణితాన్ని వెలుగులోకి తీసుకొని రావలెనన్న ఆకాంక్షతో వారి కృషి కొనసాగింది. దురదృష్టవశాత్తు ఆర్థికవనరులు లేనందువల్ల మొదటి 16 పుటలు మాత్రం అచ్చయినవి. అయితే మల్లన గణితాన్ని సమగ్రంగా సేకరించి ప్రచురించవలెనన్న ఆశయం మాత్రం ఆయనలో బలంగా ఉండినది. వారి సోదరులు శ్రీపరవస్తు వి.రామానుజస్వామిగారు, తిరుమల – తిరుపతి దేవస్థానమువారి Oriental Research Institute డైరక్టరుగా పదవీ బాధ్యతలను చేపట్టినప్పుడు, అసంపూర్ణంగా ఉన్న మల్లన గణితగ్రంథాన్ని శ్రీవేంకటేశ్వర Oriental Series (శ్రీవేంకటేశ్వర ప్రాచ్యపరిశోధనాలయం) ప్రచురణగా వెలువరిద్దామని, నిశ్చయించి అన్నగారివద్దనుండి, ఆ సామగ్రిని తెప్పించి, పరిశోధనాలయంలో ఆంధ్రవాఙ్మయ పరిశోధకులుగా పనిచేస్తూ ఉండిన బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారికి అప్పగించడం జరిగింది. ఇదివరకే ఆ అంశంమీద మంచి ఎరుక ఉన్న శ్రీశాస్త్రిగారు ఆ బాధ్యతను సంతోషంతో స్వీకరించారు. ఈ సందర్భంలో ముఖ్యమైన ప్రశ్న మనల్ని వేదిస్తుంది. శ్రీశాస్త్రులగారికి అప్పగించిన రాతప్రతులలో మల్లన రాసిన అన్ని అధ్యాయాలు ఉండినవా? – లేకుంటే దొరికినవి ఎంతభాగం?

మల్లన కృతమైన సారసంగ్రహగణితం – మహావీరాచార్యుని గణితసార సంగ్రహానికి అనువాదమని ఇదివరకే ప్రస్తావించడం జరిగింది. ఈ సారసంగ్రహగణితం పది అధ్యాయాల గ్రంథం అని పరిశోధకులంటారు. ఈ పది అధ్యాయాలు

1. పరికర్మగణితం
2. భిన్నగణితం
3. ప్రకీర్ణగణితం
4. త్రైరాశికగణితం
5. మిశ్రగణితం
6. సూత్రగణితం
7. క్షేత్రగణితం
8. సువర్ణగణితం
9. ఖాతగణితం
10. ఛాయాగణితం

అందువల్లే పావులూరి గణితాన్ని దశవిధగణితమని కూడా పేర్కొంటారు. వీటిలో శ్రీప్రభాకరశాస్త్రులు గారిచే పరిశోధింపబడి, ప్రథమభాగంగా వెలువడిన గ్రంథంలో పరికర్మభిన్నగణితాలు అంటే రెండు భాగాలే ఉన్నాయి. మిగతా భాగాలు రాతప్రతులుగానే ఉన్నాయా! లేదా అలభ్యాలా? తెలియడం లేదు.

బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారు పరిష్కరించిన పరికర్మ, భిన్నగణితములు, ప్రథమభాగంగా తిరుమల తిరుపతి దేవస్థానంవారు ప్రచురించినారు కదా. అందులో డైరక్టర్ పరవస్తు రామానుజస్వామి Prefaceలో అన్నారు. "An account of the manuscript material on which the present edition is based will be given in the introduction to the second and completing part of the work." ఆ రెండోభాగం వెలువడకపోవడం మన దురదృష్టం.

మరొక విషయం : శ్రీప్రభాకరశాస్త్రులవారు సారసంగ్రహ గణితంలో 35వ శ్లోకానికి (శశీసోమశ్శశాంకశ్చ.....) వ్యాఖ్యరాస్తూ గ్రంథ కర్తృప్రతిజ్ఞ శీర్షికతో ఉన్నభాగంలో అధోజ్ఞాపిక (foot note)గా పేర్కొన్న విషయాన్ని కూడా ఇక్కడ ప్రస్తావించవలె –

సంస్కృతమున 1. పరికర్మ 2. భిన్న 3. ప్రకీర్ణ 4. త్రైరాశిక 5. మిశ్ర 6. క్షేత్ర 7. ఖాత 8. ఛాయా గణితములని, ఎనిమిది గణితములు అన్నారు శ్రీశాస్త్రిగారు. విద్వాన్ తెన్నేటి వారు అనువదించి వ్యాఖ్యానించిన (తెలుగు అకాడమీ, హైదరాబాదు వారి ప్రచురణ, పరిష్కర్త ఆచార్య పి.వి. అరుణాచలం) సారమతిలో, ప్రవేశిక, ప్రాథమిక అంకగణిత పరిక్రియలు, భిన్నాంక పరిక్రియలు, వివిధ (ప్రకీర్ణ) సమస్యలు, త్రైరాశిక ప్రకియ, మిశ్రగణితం, క్షేత్రగణితం, ఖాతవ్యవహారం (త్రవ్వకాలకు సంబంధించిన గణితం) నీడలు, కొలతలు (ఛాయాగణితం) అని తొమ్మిది గణితములున్నాయి.

శ్రీశాస్త్రిగారి విభజన ప్రకారం ఎనిమిది గణితములు అనుకొంటే, అయిదవభాగమైన మిశ్రగణితమే తెలుగున సూత్రగణితమని, సువర్ణగణితమని రెండుగా విభజింపబడినది. కవి ప్రతిజ్ఞలో మిశ్రిత సూత్రమణి ప్రభాశోభితము అన్నాడు, కానీ సువర్ణగణితమును వేరుగా చెప్పలేదు. కాగా సంస్కృతమున నెన్మిది వ్యవహారములలో నున్న గణితములోని మిశ్రవ్యవహారము తెల్గున సువర్ణ సూత్రగణితములుగా విభక్తమగుటచేత తొమ్మిది గణితములు గలదైనది కానీ మిశ్ర, సువర్ణ, సూత్రగణితములు – మూడు అని పరిగణించినప్పుడే దశవిధగణితాలవుతాయి.

V

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతమైనది, బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రుల వారిచేత పరిష్కృతమై ప్రచురితమైన గ్రంథంలో రెండుభాగాలే ఉన్నాయి అని ఇదివరకే ప్రస్తావించడం జరిగింది.

మొదటి భాగమైన పరికర్మగణితంలో 253 గద్యపద్యాలు, రెండోభాగం భిన్న (కలాసవర్ణ) గణితంలో 89 గద్యపద్యాలున్నాయి. మొత్తం 342 ఆరోపాలు. ఇందులో చివరిదైన 342వది, ప్రశ్నార్థక చిహ్నంతో, 341లో అసంపూర్ణమైన మిశ్రపద్యం ఐదవపాదంతో ఉన్నది.

పావులూరి మల్లన, ఆదికవి నన్నయ ఒకవిధంగా సమకాలికులు (?). రాజరాజ నరేంద్రుని ప్రాచీనకాలము క్రీ.శ.1022–1063 ఆస్థానమున వెలసిన విద్యత్కవులు. మల్లనకు నన్నయ రచనలతో బాగా పరిచయం ఉండి ఉంటుంది. కనుకనే అనువాదంలో ఇద్దరి పద్ధతులలో కొన్ని ఉమ్మడి లక్షణాలు కొట్ట వచ్చినట్టు కనబడతాయి. నన్నయలాగే, మల్లన కూడా మూలంలో ఉన్న బోలెడన్ని శ్లోకాలను ఒక్క తెలుగుపద్యంలో కుదించగలనేర్పు సంపాదించిన పండితకవి. నన్నయ పంచమవేదాన్ని "భారత భారతీ సముద్రము", దానిని "దరియంగ నీదను విధాతృనకైనను నేరబోలునే" అన్నారు. మల్లన కూడా గణితశాస్త్రం గురించి, "అభినవ సంఖ్యామణిదీప్తి సారసంగ్రహ గణితసముద్రంబు దరువంగ గణగితి బ్రీతిన్'' అన్నాడు. ఈవిధంగా సంస్కృతంలోని శాస్త్రగ్రంథాలతర్జుమా, మల్లనతో ప్రారంభమైనది. ఆ ఉద్యమం అట్లాగే సాగక, ఉత్తరోత్తర స్వతంత్ర శాస్త్రగ్రంథ రచనకు నాంది ఏర్పడక, అంతటితోనే ఆగిపోవడం మన దురదృష్టం.

మూలగ్రంథమైన గణితాసార సంగ్రహకర్త మహావీరాచార్యుడు జైనుడు. అనువాదకర్త మల్లన శైవుడు. అందులోనూ పరమత సహనంలేని పరమశైవుడు. అందువల్లే మూలంలోని జైనమందిరాలను తర్జుమాలో శివాలయాలుగా మార్చినాడు. అట్లాగే జైనతీర్థంకరులను "శివకుటుంబసభ్యులుగా మార్చివేశాడు. మూలకర్త కృత్యాదిలో మహావీరునికి నమస్కరిస్తాడు. "నమస్తే స్మైజనేంద్రాయ మహావీరాయతాయినే" అంటాడు. మల్లన తన కృత్యవతరణికలో "తం శివకరం వన్దేశివం శ్రేయసే" అంటాడు. మల్లన రచనలో మూలగ్రంథకర్త ప్రస్తావనేలేదు.

తన తెనుగుసేతకు సారసంగ్రహగణితమనే పేరు పెట్టుకొన్నాడు. మూలంలో లేని పెక్కు విషయాలు మల్లన గణితంలో ఉన్నాయి. అప్రస్తుతమైన వర్ణనలను త్రోసిపుచ్చి కృతిని బట్టి అనుకృతిగా కాక కొంత స్వతంత్రరచనగా భాసిల్లజేసిన మనీషి మల్లన.

"....గణితము తెనుగున
గావింపగ గణగితిని సుకవిమల్లుడ – గౌ
రీవల్లభాచరణ సరో
జా వాసిత చిత్తమధు కరాత్ముడ..." నని చెప్పుకొన్నాడు తనని గురించి. సుకవిమల్లుడైన మల్లన ఒక సాంకేతిక గ్రంథాన్ని తెలుగులో వ్రాసే నైపుణ్యాన్ని మాత్రమేగాక, సాహిత్యభూషణాలైన ఇతర రచనలు కూడా తప్పక చేసి ఉండేవాడని నమ్మవచ్చు. ఆయన రచనగా క్రీ.శ.1916లో వావిళ్ళ రామస్వామి శాస్త్రులవారు "భద్రాద్రి రామశతకాన్ని" ప్రచురించినారు. కానీ ఆయన ఇతర కృతులు పరిశోధకులకు అందుతాయో లేవో ఎవరు చెప్పగలరు?

VI

మహా వీరాచార్యుడు మొదటి అధ్యాయంలో అంకగణిత ప్రాథమిక పరికర్మలైన సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగాహారాలను చర్చించినాడు. సున్నకు సంబంధించిన సామాన్య నియమావళిని ఉల్లేఖిస్తూ ఒక సంఖ్యను సున్నతో భాగిస్తే ఆ సంఖ్య మారదని ప్రకటించినాడు. ఇది గణితీయంగా ఒక పెద్ద తప్పు. మల్లనమాత్రం ఈ తప్పిదం చేయలేదు. మల్లన గణిత పాండిత్యానికి ఇది ఒక గీటురాయి!

సున్నను గురించిన చర్చలో, మల్లన

"సున్నయు సున్నయు బెంచిన
సున్నయ, తత్కృతి (square) **ఘనంబు** (cube) **సున్నయవచ్చున్**

సున్నయు లెక్క (Non-zero number)యు బెంచిన
సున్నయ తానమరి యుండు సుస్థిర రీతిన్"

అని చెప్పి, సున్నతో భాగించే సందర్భాన్నే స్పృశించలేదు.

భారతగణితచరిత్రలోనే కాదు, ప్రపంచగణితచరిత్రలోనూ, సున్నను ప్రతిపాదించడం, దానిని ఒక సంఖ్యగా పరిగణించడము, దాని రూపకల్పన, సంఖ్యా వ్యవస్థలో స్థానముల విలువలు నిర్వచించడం అతి ముఖ్యమైన ఘట్టాలు మహావీరాచార్యుడు సంఖ్యాగణనంలో ఎంతో నేర్పు ప్రదర్శించాడు. ఒకటి, పది, వంద, వేయి.... అని సంఖ్యకు స్థానముల విలువలను సంధిస్తూ ఇరువది నాల్గుస్థానాలను, వాటి విలువలను ప్రతిపాదించి 10 వరకు వెళ్ళినాడు. 10^{23} మహోక్షోభమని పేరు పెట్టినాడు. మల్లన ఇంకా కొంత పైకి వెళ్ళి ముప్పది ఆరుస్థానాలవద్ద ఆగినాడు. ఈతని సంఖ్యాగణనంతో 10^{35}ను సాగరమన్నాడు. మహోక్షోభం తరువాత మల్లన పేర్కొన్న సంఖ్యలు: 10^{24}= నిధి, 10^{25}= భూరి, 10^{29}= మహాభూరి, 10^{30}= మేరు, 10^{31}= మహామేరు, 10^{32}= బహుశం, 10^{33}= బాహుశం, 10^{34}= సముద్రం, 10^{35}= సాగరం.

ప్రాచీన గణితశాస్త్ర వికాసంలో గమనించతగ్గ మరో ముఖ్యాంశం సంఖ్యలకు పర్యాయపదాలువాడటం. మహావీరాచార్యునికి, మల్లనకు ఈ విషయంలోనూ కొన్ని భేదాలున్నాయి. కానీ అవి పెద్దగా చెప్పుకోతగినవి కావు.

శూన్యం, అనంతం, ఆకాశం, అంతరిక్షం, ఖమ్, గగనం, జలధరపథం... ఇతన్నీ సున్న అనే సంఖ్యకు పర్యాయపదాలు.

చంద్ర, క్షపాకర, కళాధర, ఇందు,...ఇవి ఒకటికి పర్యాయపదాలు.

అగ్ని, గుణ, హరనేత్రం...అంటే మూడు.

మహావీరాచార్యుడు "కషాయస్సలిలా కరః" అనే రెండు పదాలను అంటే కషాయము, సలిలాకరము అనేవి నాలుగు అనే సంఖ్యకు పర్యాయపదాలుగా వాడుకొన్నాడు. జైనమత సాహిత్యంలో లౌకిక జీవితానికి అనుబంధాలైన క్రోధ, మాన, మాయ లోభాలను కషాయములంటారు. ఇవి నాలుగు గనక కషాయమన్న పదం నాలుగును సూచిస్తుంది. మల్లన అనువాదంలో అబ్ధి అనే ఒక పదాన్నేవాడి కషాయాన్ని పరిత్యజించినారు. శ్రీప్రభాకరశాస్త్రులు గారు తెలిపినట్లు సంస్కృత మూలకారుడు మహావీరాచార్యుడు భూమ్యాది మానములకు మగధదేశపు సంప్రదాయము ననుసరించి కొలతలు రాయడం జరిగింది. మల్లన ఆంధ్రదేశపు సంప్రదాయమునుబట్టి ఈ కొలతలను పేర్కొనడం జరిగింది. ఈ ప్రకరణంలో మూలానికి, తెనుగు సేతకు చాల భేదాలున్నాయి.

రాస్తున్నది శాస్త్రగ్రంథము, అయినప్పటికీ మల్లన తన సమకాలీన సామాజిక సంస్కృతిని ప్రతిబింబింపజేసినాడు తన రచనలలో. ఆనాటి పూజావిధానాలు, ఆస్తిపంపకాలు, వ్యాపారగణితం, కుటుంబజీవనం, క్రీడావిశేషాలు గణిత సమస్యలలో చోటు చేసుకొన్నాయి.

నేడు మనం దేనిని గుణశ్రేఢి (geometric programme) అని వ్యవహరిస్తున్నామో దానికి సంబంధించిన సుప్రసిద్ధమైన చదరంగపు సమస్యను మల్లన పేర్కొన్నాడు. ఇది మూలంలో లేని ఒక ముఖ్య అంశం.

"..... లొకట నిల్పి దానిం
గదియగ తుదిదాక రెట్టిగా కూడినచో
విదితముగ పల్కు మాకుం
జదరంగపుటిండ్లకైన సంకలితముగన్"

ఈ సమస్యకు జవాబుగా

"శరశశి షట్కచంద్రరసాయక వియన్నగాగ్ని, భూధరగగనాబ్ధి..." మొదలుగాగల సాంకేతిక వివరణలో $(2^{64}-1)$ అన్న సంకలన ఫలితాన్ని పేర్కొన్నాడు. దీన్ని విస్తరించి రాస్తే సంకలన ఫలం.

18, 446, 744, 073, 709, 551, 615 అనీ చెప్పాడు.

VII

బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రులవారి పాండిత్యం, పరిశోధనా కౌశలము, తాళపత్ర గ్రంథోద్ధరణము, సౌజన్యమూర్తిమత్వము, యోగవిద్యావైదుష్యము, శిష్యవాత్సల్యము, పరోపకారపరాయణత, ప్రగతిశీలకభావాలు, అజాతశత్రుత్వ లక్షణాలను గురించి ఇదివరకే రేఖామాత్రంగా ప్రస్తావించడం జరిగింది.

ఆచార్య ఆమూరు నరసింగరావుగారు సారసంగ్రహ గణితానికి మున్నుడి రాస్తూ అంటారు; "He was a great Sanskrit scholar with a keen interest in Archaelogical research, a Telugu Poet, a scholar of distriction, an advanced Sadhaka in Yoga marga whose potent prayers brought sunshine rite the hearts of many an incurable sufferer, and above all, one whose delicate and sensitive soul throbbed with universal love and sympathy for suffering humanity ever as did the great Lord Buddha."

విజ్ఞాన శాస్త్రరంగానికి ఇతోధికంగా శ్రీప్రభాకరరులసేవ లందినవి. ఇదివరలో ప్రస్తావించినట్లు వారు జ్యోతిశ్శాస్త్రాన్ని, నాడీశాస్త్రాన్ని అధ్యయనం చేసి వాటి శాస్త్రీయ ప్రామాణికతకు కృషిచేశారు. అకలంకము కృష్ణమాచార్యులు రచించిన ధనుర్విద్యావిలాసమనే శాస్త్రగ్రంథాన్ని పరిష్కరించి, దానికి సమగ్రమైన పీఠికను సమకూర్చినారు. పీఠికలో శాస్త్రగ్రంథంలోని విశేషాలను వివరించినారు. “ధనుర్వేదము, యజుర్వేదమునకు ఉపవేదమెట్లైనదో తెలిపినారు. వైశంపాయన నీతిప్రకాశిక, వశిష్ఠసంహిత, శివధనుర్వేదము, మనుసారము, హరిహరచతురంగము, వీరచింతామణి, శివోక్తధనుర్వేదసంహిత, భారతాదులలోని ధనుర్వేద విషయములను చర్చించినారు.”

క్రీ.శ.1950లో పావులూరి మల్లన గణితగ్రంథంతో పాటు ఆంధ్రకామందకమనే రాజనీతి శాస్త్రగ్రంథాన్ని పరిష్కరించినారు.

“ఉపవేదములలో రెండవది అర్థవేదమని శాస్త్రిగారు ఆంధ్రసారస్వతమునగల అర్థనీతిశాస్త్రగ్రంథాల వివరాలొసగినారు” రెట్టమతశాస్త్రగ్రంథమును పరిశోధించి పరిష్కరించి ప్రామాణికంగా రూపొందించినారు. జ్యోతిశ్శాస్త్రమునకు సంబంధించి, అరవదేశంలో బాగా ప్రచారంలో ఉన్న శుక్రనాడి, చంద్రనాడి, బ్రహ్మనాడి, ధ్రువనాడి, అగస్త్యనాడి, విశ్వామిత్రనాడి, సుబ్రహ్మణ్యనాడి, వినాయకనాడి మొదలైన ప్రముఖనాడీ గ్రంథాలను గురించి అనేక వివరాలు, స్వయంగా ఆయా ప్రదేశాలకు వెళ్ళి, ప్రముఖులను కలుసుకొని, సేకరించినారు. ఎంతో ఆసక్తిని, ఆశ్చర్యాన్ని కలిగించే నాడీసారస్వతం ప్రపంచవిజ్ఞాన శాస్త్రగ్రంథాల పట్టికలోకి ఎందుకు ఎక్కలేదో? అన్న ప్రశ్న సంధించారు శ్రీశాస్త్రిగారు. నాడీగ్రంథాలను గురించిన వ్యాసంలో శ్రీప్రభాకరులవారంటారు, “నా ఈ వ్యాసము అనేకులకు అవిశ్వాసార్హముగా దోపవచ్చును. కొంత వ్యయప్రయాసలకు బాల్పడి వారు అందలి సత్యాసత్యములను నిర్ధారింపజూతురుగాక” ఈ మాటలలో మనకు ప్రస్ఫుటమయ్యే ప్రభాకరులవారి సత్యాన్వేషణ పరమైన శాస్త్రీయ దృక్పథం వారి విజ్ఞాన శాస్త్రమూర్తిమత్వానికి విజయసంకేతం.

వృక్షాయుర్వేదమును గురించిన అనేక విషయాలను ప్రాచీన సాహిత్యంనుండి వీరు త్రవ్విపోసినారు. తెలుగులిపిని శాస్త్రీయ దృక్పథంతో పరిశీలించి లిపి సంస్కరణను ప్రతిపాదించిన లిపిశాస్త్ర ప్రవీణులు శ్రీశాస్త్రిగారు.

ఇపుడు కొంత విపులంగా సారసంగ్రహ గణిత పరిశోధన, పరిష్కరణ, ప్రచురణను గురించి తెలుసుకొందాము. ఈ పీఠికలో ఇదివరకే అక్కడక్కడా మల్లన మూలగ్రంథానికి భిన్నంగా, తనదైన ధోరణిలో, సారసంగ్రహ గణితాన్ని రూపొందించిన వైనం సూచించడం జరిగింది. ప్రథమభాగంగా, 341+1 వెరసి 342 పద్యగద్యాలతో దరికర్మభిన్న గణితాలను ప్రథమభాగంగా ప్రచురించబడిన విషయం కూడా ఇదివరలో చర్చించిన అంశమే.

సారసంగ్రహగణితంలో ప్రతి పద్యానికి, ప్రతి గద్యానికి లోతులకు వెళ్ళి చక్కని టీకలను వ్రాసియున్నారు శ్రీశాస్త్రిగారు. ఈ ప్రచురణలో ఆద్యంతం ఆ టీకలను యథాతథంగా ఉంచడమైనది. శ్రీశాస్త్రులవారు తెలుగు అంకెలను ఉపయోగించి గణితకలన వ్యవహారాలను కొనసాగించినారు. అనేక రాతప్రతులను పరిశీలించి, ఒక ప్రామాణిక ప్రతిని రూపొందించి ప్రతిపుటలో సంఖ్యాత్మక సూచనలతో అనేక విషయాలను పాఠాంతరాలను, ఛంధశాస్త్ర సూక్ష్మాలను, మూలగ్రంథంలో విభేదించిన అంశాలను, గణితప్రక్రియలను, వివరించడం జరిగింది.

మొదటి అధ్యాయం పరికర్మగణితంలో గుణకారానికి సూత్రంబట్టిదని కందపద్యం 38లో మల్లన స్థూలంగా చెప్పాడు. దానికి సంపూర్ణ వివరణలిస్తూ, ఇతర ప్రతులలో లభ్యమైన సామగ్రితో పోలుస్తూ శ్రీశాస్త్రిగారు దాదాపు రెండుపుటల అధోజ్ఞాపిక (footnotes)ను వ్యాఖ్యలో చేర్చారు. పరిభాషలు తెలిసే క్రమాన్ని కూడా ఉటంకించినారు. లభ్యమైన, రాతప్రతులనుండి అనేక సందర్భాలలో పాఠాంతరాలు తీసుకొని అధోజ్ఞాపికలో చేర్చారు. కొన్ని సందర్భాలలో పాఠాంతరాలను గ్రంథభాగంగానే అమర్చియున్నారు. సంస్కృతమూలంలో లేని శ్లోకాలకు అనువాదాలుగా తెలుగు ప్రతులలో చోటుచేసుకొన్న పద్యాలను బాగా పరిశీలించి అందులో కొన్ని పావులూరి వారి రచనలు కావని, అవి ప్రక్షిప్తాలని ఖరాఖండిగా తేల్చి చెప్పిన సందర్భాలున్నాయి శ్రీశాస్త్రిగారి వ్యాఖ్యానంలో.

ప్రతి పద్యానికి, పద్యం చివర, దానిలోని గణితాంశాలను చదువరులు సులభంగా తెలుసుకోవడానికి కావలసిన చక్కనివివరణలు, ఆద్యంతం శ్రీశాస్త్రిగారు ఇచ్చియున్నారు.

పరిష్కృతమైన ప్రతిలో లేనివి కొన్ని, ఇతర ప్రతులలో కానవచ్చేవి అయిన పద్యాలను ఉటంకించియున్నారు. పద్యంలో పదాలరూపంలో ఉన్నదత్తాంశాన్ని

సంఖ్యారూపంలోకి మార్చడం – ఈ ప్రక్రియను ఆద్యంతం నిర్దుష్టంగా కొనసాగించిన గొప్పకౌశలం శ్రీశాస్త్రిగారిది.

ఉదాహరణకు పరికర్మగణితంలో 92వ పద్యం చూడండి.

సరణి శశివేద దశగతి
సరసిజభావ రంధ్రదంతి శైల శర క్ష్మా
జలధి కరబాణధరణులు
సరి శశికరి సంఖ్యఁ బెంచి చయ్యన చెపుమా.

ఇక్కడ గుణకం, శశికరి అన్నాడు. శశి అంటే 1, కరి అంటే 8. అంకానామ్ వామతో గతిః కదా. (సంఖ్యాపరిభాషలో 35వశ్లోకంలో: అష్టమం, గజకర్ణచ దిగ్గజం దన్తిహస్తికమ్, ద్విశదం, మత్తమాతంగ పన్నగావసువారణాః (ఈ పద్యంలో "ర–ల" ప్రాసమైత్రి గుర్తించగలరు) అట్లాగే గుణ్యం (Multiplic and)

శశి, వేద, దశ, గిరి,....ధరణి

152415789971041

ఇప్పుడు చేయవలసిన గుణకారము

152415789971041×81 = 12345678987654321

ఇది ఒక సమగ్రమైన ద్విముఖసంఖ్య

పద్యాలకు సంబంధించిన అధోసంకేతాలలో చారిత్రకశాసనాల ప్రస్తావన (చూడండి : 12వ పద్యానికి సంబంధించింది) ఛందోసంబంధమైన సూక్ష్మాలు (తద్భవవ్యాజయతి, 7వ పద్యంలో జ్ఞా–న ల కు యతిమైత్రి), సంఖ్యలవర్గాలు వల్లించడానికి పాకృతభాషలో ఉన్న పంక్తులు, వాటికి తెలుగు పలుకుబళ్ళు, అట్లాగే వర్గమూలాలకు సంబంధించిన ప్రాకృతపంక్తులు, వాటిని తెలుగుపలుకుబళ్ళు, సంఖ్యలఘనాలకు, ఘనమూలాలకు అన్వయించిన

ప్రాకృతమున, తెలుగున పలుకుబళ్ళు మొదలైనవి ఎన్నో ఆసక్తికరమైన విషయాలు అధోజ్ఞాపికద్వారా మనం తెలుసుకోవచ్చు. (చూ-పద్యం 149)

పరికర్మ గణితంలోని వర్గువు, వర్గమూలం, ఘనం, ఘనమూలములకు, సంబంధించిన అధోజ్ఞాపికలలోని గణనపద్ధతులు, అద్భుతమైన అంశాలు.

ఘనమూల (Cuberoot) గణనం గురించి 161వ పద్యంలో ఒక సూచనగా మల్లన ప్రతిపాదించిన పద్ధతిని చాలవిపులంగా అధోజ్ఞాపికలో శ్రీశాస్త్రిగారు పాఠకులకెరుక పరచిన పద్ధతి చాల ప్రశంసనీయం. ఈ సందర్భంగా ప్రాకృతంనుండి ఆధారాలను సేకరించి వాటిని చక్కగా అమర్చిన తీరుకు ఎవ్వరైన ఆశ్చర్యపడవలసిందే.

పరికర్మగణితంలో సంకలిత భాగాన్ని సప్తమపరికర్మగా పేర్కొన్న సందర్భంలో 167వ కందపద్యానికి సంస్కృతమూలాన్ని జోడించి శ్రీశాస్త్రిగారు వ్యాఖ్యానించిన తీరు విలక్షణంగా ఉన్నది. ఇదే సందర్భంలో వారు లెక్కచేసి చూపిన గచ్ఛాయన సూత్ర వివరణ మరింత విలక్షణమైనది, విలువైనదిన్నీ. ఆ తరువాత భాగాలైన ఉత్తరానయన సూత్రవివరణ, ఉత్తరగచ్ఛాయన సూత్రాదులు, సంకలితోత్తరానయన సూత్రాలు, వాటి టీకలు ఈ కోవకు జెందినవే.

రెండోభాగమైన భిన్నగణితంలో మొదట భాగహారచర్య, తరువాత భిన్నవర్గువు, ఆ తర్వాత భిన్నాలకు వర్గాలు కట్టడం, వాటిని మిశ్రమభిన్నాలుగా రాయటం భిన్నాలకు సంబంధించిన వర్గమూలాలు, సంకలితము, వ్యుత్కలితములున్నాయి - పాఠ్యాంశములో అక్కడక్కడా ఏర్పడిన గ్రంథపాఠాలను గూడా సూచించారు బ్రహ్మశ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రులవారు. వారి వైదుష్యానికి నమస్కృతులు.

VIII

ఇరవయ్యో శతాబ్ది తొలిదశకంలో మదరాసు ప్రెసిడెన్సీ కళాశాలలో Professor of Sanskrit and Comparative philodogyగా శ్రీ M.రంగాచార్యులు ఉద్యోగంలో చేరినప్పుడు, Mr G.H. Stuart మదరాసు ప్రెసిడెన్సీకి Director of Public Instructor గా ఉండేవారు. శ్రీరంగాచార్యులు కళాశాల ఆచార్యులుగా ఉంటూ గవర్నమెంట్ ఓరియంటల్ Manuscript లైబ్రరీలో Curatorగా అదనపు బాధ్యతలు నిర్వహించారు. ఆ సందర్భంలో Mr G.H.Stuart ప్రేరణతో శ్రీరంగాచార్యులు గణితసార సంగ్రహ రాతప్రతుల్ని పరిశీలించి స్టూవర్ట్ దృష్టికితేవడం జరిగింది. ఈ రాతప్రతులు హైందవ గణితచరిత్ర తాలూకు, కొత్తవిషయాలను ప్రపంచానికి తెలియజేస్తాయని, వాటిప్రాముఖ్యాన్ని పసిగట్టి, మహావీరాచార్యునిదైన ఆ గణిత గ్రంథాన్ని పరిష్కరించి ప్రచురించే బాధ్యతను అప్పగించాడు.

ఆ రోజుల్లో ప్రాచ్య, పాశ్చాత్య గణిత శాస్త్రాలలో బాగా కృషిచేసి ఖ్యాతి గాంచిన గణితాచార్యుడు Dr David Engene Smith, అమెరికా – న్యూయార్క్ మహానగరంలోని కొలంబియా విశ్వవిద్యాలయంలో గణితాచార్యుడు. అదృష్టవశాత్తు ఆ మహానుభావుడు మదరాసుకు విచ్చేసియుండి, సౌజన్యపూర్వకంగా శ్రీరంగాచార్యులకు కలుసుకున్నప్పుడు, ఆచార్యులు ఈ గణితసారసంగ్రహం రాతప్రతులను గురించి వారితో చర్చించడం జరిగింది. Dr Smith వెంటనే ఆ సామగ్రిని, దాని ప్రాముఖ్యాన్ని గుర్తించి, దాని మీద ఒక మోస్తరు పరిశోధనా పత్రాన్ని తయారుచేసి, రోమ్ నగరంలో ఏప్రెల్ 1908లో జరిగిన అంతర్జాతీయ గణిత సదస్సులో చదివి. ప్రపంచగణితవేత్తల దృష్టికి మహావీరాచార్యుణ్ణి ఆయన రచనను తీసుకొని వెళ్ళడం జరిగింది.

– ఆచార్య పి.వి.అరుణాచలం

PREFACE

Even while the late Mr. M. Rangacharya was editing the *Ganitasarasangraha* of Mahaviracharya in the first decade of this century, my brother S.P.L.Narasimhaswami of Visakhapatnam collected several manuscripts of this *Sarasangrahaganita* by Pavuluri Mallana, and later he began to publish it and printed about 16 pages. But the enterprise had to be given up for want of funds. The idea of publishing this rare and ancient Mathematical work in Telugu, however, never left his mind and he was working at it off and on. After I came to this place as the Director of the Institute, I formed the idea of issuing the work as a volume of the Sri Venkatesvara Oriental Series, but owing to pressure of other work I had not the opportunity to command the necessary time for preparing the work for publication. The late Mr. V. Prabhakarasastri knew about the enterprise from its inception and as soon as he assumed charge of the post of Reader in Telugu, he offered to undertake the edition of the book as part of the programme of his work in the Institute. I gladly accepted his offer and placed all the manuscript material with me at his disposal. It is really unfortunate that the hand of Providence should have snatched him away from our midst before he could carry the work completely through the Press. The first two books of the treatise were printed and the work had to be suspended for want of an editor. It is decided to publish the portion printed so far without waiting indefinitely till the completion of the whole work. It is under these circumstances that I am issuing a part of the book to the public.

We learn from the introductory verses in the work, that the author is Mallana, son of Sivvana and grand-son of Mallana who was the recipent of the grant of a village called Navakhandavada near Pithapuram from the Andhra King, Rajarajanarendra. As Rajarajanarendra's dates are known, we may safely assign the author of our work to the last quarter of the 11th century A.C. He belonged to the village Pavularu in Kammanadu and was a Brahman of Garagyagotra following Apastambasutra. His parents were Sivvana and Gauramma. He made obeisance to Siva in the beginning of the work.

The author summarises the utility of Mathematics in the third introductory verse of the, work. Mathematics helps one in calculating the motion of the heavenly bodies and the time of the eclipses, in understanding the intricacies of different sciences like Logic, Grammar, etc. and in finding out the form and extent of the earth and of the continents.

The treatise, *Sarasangrahaganita* consists of the following ten books :

1. Parikarmaganitamu
2. Bhinnaganitamu
3. Parakirnaganitamu
4. Trairasikaganitamu
5. Misraganitamu
6. Sutraganitamu
7. Kshetraganitamu
8. Suvarnaganitamu
9. Khataganitamu
10. Chayaganitamu

By reason of the treatment of the above ten topics in the treatise, it is also popularly khown as *Dasavidhaganitamulu.*

The contents of the different chapters of *Sarasangrahaganita* closely follow those of Mahaviracharya's *Ganitasarasangraha* so far as they are found in the latter. From this and from the fact that Mahaviracharya lived about two centuries prior to Mallana, we may conclude that the latter was indebted to the former at least partially. if not wholly. There are several problems in the Telugu work which are not found in the Sanskrit work and some of the statements in the latter work are wanting in the former. Some of the chapters in the Telugu work have no parallel in the Sanskrit prototype. This much we can say with confidence that Mallana at least got his inspiration from the Sanskrit author, although Mallana nowhere refers to the earlier Sanskrit work.

Mallana is said to be the village 'Karanam' of Pavuluru, and has thus naturally evinced interest in the study of Mathematics and field survey. Mahaviracharya's work was perhaps popular in his day, and having studied it, he must have thought that it would be useful to those following his profession, if the work was adapted into Telugu. It has become a practice in our country to adopt the form of verse, even in writing works on technical subjects. Most of our Nighantus like those of Amara and Medini, works on Medicine like Charaka and Susruta, works on Astronomy etc. and even this work of Mahaviracharya itself, are all put in verse form. Our Mallana did not choose to break this tradition, and it must be said to his high credit, that he has very well succeeded in it. Though we have not got any of his other works in Telugu, we may be sure that he is an adept in writing Telugu poetry; for, in this work, he calls himself a

"Sukavimalla", 'a wrestler among good poets', with a pun on his own name, and feels so well equipped to write even a Mathematical work in Telugu verse. He writes in simple, idiomatic Telugu, free from all artificiality, and adopts a free and flowing style in his versificaton. Though coming just after Nannaya, he avoids long Sanskrit compounds, and adopts a style quite suitable to the subject he has taken on hand. Mallana stands as the second poet after Nannaya in the history of Telugu literature, and his work on Ganita is the second work so far known in Telugu.

I am obliged to Mr. Amuru Narasingarao, M.A., D.Sc., Professor of Applied Mathematics in the Madras Institute of Technology and President of the Indian Mathematical Society for the valuable Foreword to the work and to my friend, Mr. V. Apparao, M.A., Principal, Andhra University Colleges, Waltair for securing the Foreword.

An account of the manuscript material on which the present edition is based will be given in the Introduction to the second and completing part of the work. I must however in advance express my gratitude to my brother for placing at my disposal the whole manuscript material that he secured and to the Government Oriental Manuscripts Library, Madras and to the Telugu Academy, Kakinada For the loan of their manuscripts.

P. V. RAMANUJASWAMI

Director.

FOREWORD

My late lamented friend, Brahmasri Veturi Prabhakara Sastri, whom the cruel hands of death snatched from our midst barely a year ago, possessed a remarkably varied and versatile, personality. He was a great Sanskrit scholar with a keen interest in Archaeological research, a Telugu poet, a scholar of distinction, an advanced Sadhaka in Yoga marga whose potent prayers brought Sunshine into the hearts of many an incurable sufferer, and above all, one whose delicate and sensative soul throbbed with universal love and sympathy for suffering humanity even as did the great Lord Buddha. The latest, and certainly not the least, of Sastri's service to the cause of Telugu literature-a cause dear to his heart—is this publication of Pavuluri Mallana's *"Sarasangrahaganitamu"* which is a Telugu rendering of Mahaviracharya's Ganitasarasangraha in Sanskrit.

Mahaviracharya's work, which was first translated and published by the late Prof. M. Rangacharya in 1912, is of considerable importance in the history of Indian Mathematics because Mahavira and Sridhara (who were contem poraries) help to fill the big gap between Brahmagupta's *Brahmasphuta Siddhanta* (628 A.D.) and *Khanda-Khadyaka* (665 A. D.) and Bhaskara's works (of which the *Siddhanta Siromani* is the most well known) in the 12th century, a gap in which we come across only comparatively minor names like Manjula (b. 932 A.D.) and Sripati (b.1000 A.D.). Mahaviracharya's work is also important because it gives us a glimpse of the Istate of Mathematical knowledge in South India in the middle of the 9th century since Mahaviracharya was in some way connected

with the Rashtrakuta King Amoghavarsha Nrpatunga who is known to have reigned roughly from 814 A.D. to 877 A.D. The decimal motation is used throughout, the digits being given beginning from the units place, and replaced by number words like Moon for "one", eye for "two" etc. as in all ancient Indian Mathematical works. The rules given are fuller than in earlier works, and a large number of examples are given. One of the characteristic high water marks of Indian Mathematics is the solution of indeterminate equations, and this receives considerable attention from the author.

Pavuluri Mallana, into the controversy connected with whose date or identity I am not competent to make a pronouncement, was no mere translator. He had added to the examples in some places and omitted some in others, Instead of giving the weights and measures prevailing in Magadha Desa as given in the original, he gave the weights and measures in use in Andhra Desa in his time. It is interesting to notice that the only mistake (as far as I have been able to notice) in the original, namely a statement that "a number remains unchanged when it is divided by zero" (vide *Ganitasarasangraha* Chapter 1, verse 49.) is omitted in the translation (vide page 16). But one cannot with certainty conclude that the omission is due to a perception of the error as there are correct statements which follow immediately regarding the signs of the products of positive and negative numbers which are also omitted in Mallana's rendering.

The existence of a Telugu rendering suggests that Mahaviracharya's *Ganitasarasangraha* must have been well-

known in the south. Both Prabhakara Sastri and the authorities of the T.T.D. Oriental Institute, Tirupati who are bringing the book out, deserve the thanks of lovers of Hindu culture in making this book readily available to the Telugu knowing public.

CHROMEPET,
19th September 1951

Amuru Narasinga Rao,
Prof. of Applied Mathematics,
Madras Institute of Technology: and
President, Indian Mathematical Society.

పద్యక్రమసూచిక - అకారాది

	పద్యం	పుటసంఖ్య
1.	అందు సంకలిత గచ్ఛానయన	119
2.	అందొనరభాజ్యమానము	65
3.	అనవద్యమైన	128
4.	అతిశయముగ ద్రిబాగ	196
5.	అతిశయముగఁ బాదత్రయ	191
6.	అమరగసోమాంబర	46
7.	అమరగనేకాది నవాంశము	94
8.	అమరగ షోడశభాగము	198
9.	అయిదురెండ్లు	81
10.	అర పలమెడు	190
11.	అరయనేకార్ధమును	229
12.	అరయరత్నములు	36
13.	అర్కాదిగ్రహసంచార	01
14.	అర్థపంచమంబు	227
15.	అర్థమష్టోత్తరాహతమై	119
16.	అర్ధమాది పంచమాంశ	224
17.	అర్థషష్ఠసూర్యాంశ	216
18.	అర్ధస్వభాగసహిత	187
19.	అవనిజిన్నమునకు	186
20.	అవనినేకార్ధమును	230
21.	అవినాశియగు	05
22.	అష్టచంద్రులు	77
23.	అష్టచయగుణమునపయి	213

	పద్యం	పుటసంఖ్య
24.	అష్టత్ర్యంశక	208
25.	అష్టమాంశాన్వితాష్ట	231
	ఆ	
26.	ఆదిగచ్ఛబెంచి	124
27.	ఆదిగుణసంఖ్య	168
28.	ఆదిపదమూడు	123
29.	ఆదిద్విపంచభాగము	214
30.	ఆది మూడు గుణోత్తరంబష్టసంఖ్య	154
31.	ఆది మూడుత్తరంబొక	138
32.	ఆది మూడునుత్తర మద్రిసంఖ్య	165
33.	ఆది మూడుప్రచయ	210
34.	ఆది యర్థముత్తరము	226
35.	ఆదియునర్థము	223
36.	ఆదియును మూడునుత్తరమద్రి	176
37.	ఆది యెనిమిది	115
38.	ఆది యేడు గచ్ఛ	152
39.	ఆది యేడు గుణోత్తర	155
40.	ఆది యొకదుత్తరము	226
41.	ఆదిరససంఖ్యయుత్తరమష్టసంఖ్య	169
42.	ఆదిరససంఖ్యయుత్తరమష్టసంఖ్య	175
43.	ఆది రెండుమూడుత్తరమబ్ధిచంద్ర	165
44.	ఆది రెండుమూడుత్తరమబ్ధిచంద్ర	167
45.	ఆది షష్ఠంబు	164
46.	ఆది షష్ఠభాగత్రితయంబు	209

	పద్యం	పుటసంఖ్య
47.	ఆఋనొక్కట్ల	40
48.	ఆవాలు	14
	ఇ	
49.	ఇందుగగనేందు	51
50.	ఇచ్ఛధనము	130
51.	ఇది గణితశాస్త్ర	07
52.	ఇమ్ముగను	38
53.	ఇరువది నాలుగుతులములు	15
54.	ఇలఁగమ్మనాటిలోపల	02
55.	ఇలఁజిన్నమునకు	186
56.	ఇలవీసములు రెండు	15
57.	ఇష్టుదుత్కలితుడు	157
	ఈ	
58.	ఈశుఁబూజించె	219
	ఉ	
59.	ఉత్తరంబు పాలు	131
60.	ఉత్తరము మూడు	128
	ఋ	
61.	ఋతునిధినేత్ర	91
	ఎ	
62.	ఎత్తుగలలోహము	13
63.	ఎనిమిది దక్కగ	31
64.	ఎనిమిది పలములు	190
65.	ఎనిమిది యేనులు	57
66.	ఎనిమిది వేలును	65

పద్యం	పుటసంఖ్య
ఏ	
67. ఏకంతు ప్రథమం	18
68. ఏకమాది ప్రచయమేకార్థమగు	211
69. ఏకస్థానము	18
70. ఏకాదశ శత	134
71. ఏకాదశాంశ యుతమై	197
72. ఏకాది దశాంతముగా	118
73. ఏకాది దశోత్తరముగ	112
74. ఏకాది నవాంతఘనా	103
75. ఏకాది నవాంతముగా	89
76. ఏకాది నవాంత్యముగా	162
77. ఏకాది నవాంత్యముగా	171
78. ఏకాద్యఘనానీకము	103
79. ఏకాశీత్యంశంబుల	199
80. ఏకార్థమాదియుత్తర	212
81. ఏకోనగచ్ఛదళితము	127
82. ఏడును నేనార్లును	32
83. ఏడు నెనిమిది తొమ్మిది	220
84. ఏడు మూడు సున్న	34
85. ఏడు వరుసలెక్క	82
ఐ	
86. ఐనను తమతమ	04
ఒ	
87. ఒకడాదిగచ్ఛ	126
88. ఒకడూనమైన గచ్ఛను	110

పద్యం	పుటసంఖ్య
89. ఒకడూనమైనగుణమున	153
90. ఒకమాడ కర్థపాద	181
91. ఒక్కటి మొదలుగ	84
92. ఒక్కడు మొదలుగ గడపటి	145
93. ఒక్కడు మొదలుగదిన	116
94. ఒక్కొక్కశివాలయ	30
95. ఒనరబంచార్థ	195
క	
96. కడయంకము	83
97. కదియగనెనిమిది	202
98. కనకమినుమడించి	121
99. కనుమూసి	09
100. కమలజవేద	59
101. కరిసంఖ్య గుణోత్తర	149
102. కలితాష్ట	193
103. కానులుమొదలుగ	07
104. కావునగణితము	02
గ	
105. గచ్ఛపరిమాణగుణ	148
106. గడియలురెండు	09
107. గణితమున నిష్టధనముం	210
108. గతిపయోధి	35
109. గిరి ఋతుశర	69
110. గిరి గగనచంద్ర	37

పద్యం	పుటసంఖ్య
111. గిరి తర్కరామ	49
112. గిరి నగరాంబర	52
113. గిరినాగగుణరసంబులు	86
114. గిరినిధి పుష్కర	54
115. గిరిపుర	34
116. గిరి రాములఁ బరిమితముగ	44
117. గుణకము గుణోత్తరము	150
118. గుణగతి	34
119. గుణచంద్రకరుల	97
120. గుణనాగగతి	70
121. గుణశశిరంధ్ర	104
122. గోత్రపవిత్రుదు	03
123. గ్రంథకర్తృప్రతిజ్ఞ	23
ఘ	
124. ఘనము గొని	94
125. ఘనమూలము గొనితత్కృతి	100
126. ఘనశోధ్యభాజ్య	102
చ	
127. చంద్రనేత్రవహ్ని	68
128. చంద్రబాణశరము	80
129. చంద్రభూతతర్క	68
130. చనువర్గమూల	88

పద్యం	పుటసంఖ్య
ఛ	
131. ఛేగమునకు బరిరూపం	183
132. ఛేదమున బెంపు	185
133. ఛేదమున భాగహార	189
134. ఛేద రహితమున, నేక	227
135. ఛేదాంశముల	178
జ	
136. జగతిఁజిన్నమునకు	182
137. జలధికరాద్రి	58
138. జలధిరసగజాష్ట	109
139. జలధివేదవహ్ని	108
త	
140. తగఁజేతరెందు	144
141. తనజన్మదినము	117
142. తర్కసోములు	75
143. తురగవహ్నిగగన	58
144. తురగ హయమునులు	43
145. తురగాంబరాక్షి	35
146. తురగేందు రామ	67
147. తోయధి గగన	98
148. త్రికమాది గచ్ఛ	126
ద	
149. దలసహితమైన	121
150. దలసహితత్రికమునకున్	203

పద్యం	పుటసంఖ్య
151. దళదష్టమష్టమూష్టమ	215
152. దృష్టధనముచే	136
153. ద్వాదశాంశాలి	233
ధ	
154. ధనమాది	150
155. ధరణిఁ జిన్నమునకు	184
156. ధూపగంధపుష్ప	228
న	
157. నగగతిగజ	38
158. నవగజగిరహయ	50
159. నవగతిరసగతి	48
160. నవఘన భాగంబుల	206
161. నవరసగుణనిధి	42
162. నవశతధాన్యము	10
163. నవశశాంకచంద్ర	107
164. నవసంఖ్యమానికముల	29
165. నామభూమి దివులు	62
166. నాలుగుకానులు	11
167. నాలుగుగోకర	10
168. నాలుగు మొదలుగ	116
169. నాలుగువడ్లు	12
170. నిధిజలనిధి	66
171. నిధినాగాష్టఖ	92

పద్యం	పుటసంఖ్య
172. నిమిషమష్టదశత	09
173. నీరజరిపురస	69
ప	
174. పదమిష్టము చయహతమై	207
175. పదమూడు నాదిగాఁగొని	115
176. పదయుతేష్టంబు	221
177. పదియారువీసాలు	12
178. పదియేనునిర్వదేనును	85
179. పదియేను నిర్వదేన్ ముప్పది	95
180. పరగగ నాదిషడంశము	208
181. పరగగ శశిరసవారణ	134
182. పరగ నలుబది	199
183. పరగ నవదళ	201
184. పరగవెలమాడ	181
185. పరమాణువులు	
186. పలమెడు కర్పూరమునకు	183
187. పలమెడు కర్పూరమునకు	179
188. పలమెడు కస్తూరికి	183
189. పలమెడు కుంకుమ	180
190. పలమెడి చందనము	180
191. పలమెడు పిప్పళ్ళకు	185
192. పాదపంచమాంశ	228
193. పాదసహితాష్టకంబు	231
194. పుడమిని ముప్పైయొక్కటి	80

పద్యం	పుటసంఖ్య
195. పురగజగతి	68
196. పురగతిశశధర	33
197. పురతుహినకిరణ	51
198. పురనగవసుశర	48
199. పురనగవస్విషు	61
200. పురభూధరసాయక	53
201. పురలోచనగిరిరస	70
202. పురశశిగగనాచలముల	64
203. పురసంఖ్యగుణోత్తర	149
204. పురసంఖ్యయాదిషోడశ	125
205 పురసంఖ్యయాదిగచ్ఛయు	151
206. పూనిశివారాధన	37
207. ప్రకటితాష్టకృత్యంశముల్	205
208. ప్రచయమునవిష్టగచ్ఛ	166
209. ప్రచయార్ధాదుల	225
210. ప్రణమిల్లి శివునకీ క్రియ	01
బ	
211. బాణచంద్రులు	74
212. బాణశశులు	218
213. బాహువేదతర్క	63
214. బ్రహ్మసోములు	78
భ	
215. భాసురసంజ్ఞా	03
216. భూచంద్రకర	56

పద్యం	పుటసంఖ్య
మ	
217. మనుసంఖ్యయాది	170
218. మాడకు నగరు	182
219. మాడలు మూడును	11
220. మానుగ నిడుపు	07
221. మానుగ నేకాంగుళఘన	08
222. మానైన నూట యిరువది	204
223. ముదము తోడ	29
224. మున్నూటరువది	133
225. మూడుమాడలు	145
226. మూడువేలమీద	86
227. మేలుగనెనిమిది	27
228. మొదల ౘదుదయందు	52
229. మొదలును ప్రచయము	139
230. మొదలెన్నగ మూడుత్తర	122
231. మొదలొకడుత్తర యెనిమిది	137
232. మొదలొకడు నిల్పి	146
233. మొదలొకడు మూడు ప్రచయము	138
234. మొదలొడుత్తర మొక్కడు	222
య	
235. యుగరసరస	71
ర	
236. రంధ్రనాగ గిరిధరర్తుల	57
237. రంధ్రనాగ భూధరర్తుల	63

పద్యం	పుటసంఖ్య
238. రత్నశైలశరాగ్ని	40
239. రసగుణేషు బాణ	85
240. రసనవాక్షిశైల	90
241. రసరామబాణ	90
242. రాజతర్కనేత్ర	67
243. రాజాబ్ధిఖేందు	37
244. రామగజరసనగేంద్రియ	31
245. రామగతిచంద్ర	33
246. రామచంద్రులు	71
247. రామశైలసోమ	80
248. రామాంబర నిధి	39
249. రామాగ్నివహ్ని	42
250. రుద్రాంబర	36
251. రెండాదిగచ్ఛ	153
252. రెండు జవలు	14

వ

253. వనధిగజేంద్రియ	108
254. వరచతురంగగేహముల	147
255. వలసిన సంఖ్యచేతను	157
256. వసురామలోక	85
257. వార్ధిసోములు వార్ధిబాహులు	73
258. వితతముగ	66
259. వితతచ్ఛేదాంశంబుల	198
260. వితతచ్ఛేదాంశంబులఘనమూలము	204

పద్యం	పుటసంఖ్య
261. విత్తమాదిచేత	157
262. వినుజొన్నగింజెత్తు	17
263. వినుతగుణగణ్య	25
264. వినుతచ్ఛేదాంశంబుల	201
265. వినునూట యరువదెనిమిది	98
266. వినుమాది నాలుగుత్తర	163
267. వినుమాది నాలుగుత్తర	122
268. వినుమాది నాలుగుత్తరయెనిమిది	168
269. వినుమాది నాలుగుత్తర మెనిమిది	174
270. వినుమాది మూడుగా	114
271. వినుమూడాది	143
272. వినురెండాది	156
273. వీసెలురెండొక	12
274. వెలయగ ఋతునగ	70
275. వెలయగ నంశచ్ఛేదం	195
276. వెలయగ శశిగిరి	47
277. వెలయ ద్రిభాగయుత	192

శ

278. శరనయన ఋతు	106
279. శరనయనాంబర	69
280. శరశశిషట్కచంద్ర	146
281. శరసంఖ్యయయ్యెనాద్యుత్తరములు	170
282. శరసంఖ్యయయ్యెనాద్యు	164
283. శరసంఖ్యయయ్యెనాద్యుత్తరములు	175

పద్యం	పుటసంఖ్య
284. శరసంఖ్యయుత్తరము	129
285. శశికరాగ్ని	71
286. శశికరాబ్ధి	43
287. శశిపయోధిచంద్ర	67
288. శశిపయోధివేదజలనిధి	91
289. శశిశశికరకర	64
290. శశీసోమశ్శశాంకశ్చ	21
291. శైలగగన	41
292. శైలగుణసంఖ్య	45
293. శైలచంద్రులు	78
294. శ్రీకంఠంసగుణం	01
295. శ్రీకాంతనిర్మలమనోర్చిత	178
296. శ్రీనిలయుండు	03
297. శ్రీలలనేశుడంధ్ర	02
స	
298. సంజ్ఞలెరుగకున్న	04
299. సదృశహృతచ్ఛేద	215
300. సప్తమ స్వదళిత	232
301. సమదళంబులబొట్లు	142
302. సమదళవిషమసురూపము	140
303. సమసంఖ్యాసప్త	215
304. సరణి శశివేద	57
305. సరసిజగర్భరంధ్ర	44
306. సరసిజభవ గరిరస	135

పద్యం	పుటసంఖ్య
307. సరసిజభవగుణ నిధి	39
308. సరసిజభవగుణదివశర	56
309. సహిత పదహిత	160
310. సున్నయు సున్నయు బెంచిన	27
311. సోమాంబర నేత్రాంబర	42
312. సోమాంబుధి వేద	31
313. స్వార్ధదశక త్రిభాగంబు	193
హ	
314. హతినేకముగా	118
315. హిమకరబాహు	79
316. హిమకరవసు	30
317. హృద్యమున	132

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

౧

పరికర్మగణితము

కృత్యవతరణిక

శ్లో. శ్రీకణ్ఠం సగుణం సమస్తజగతాం కర్తారమీశం గురుం
భూతోయానలచంద్రసూర్యపవనవ్యోమాత్మమూర్తిం విభుమ్ ।
నిత్యానన్దమయోఽపి యో గిరిజయా సార్ధం ప్రజావృద్ధయే
మాయాయోగముపైతి తం శివకరం వన్దే శివం శ్రేయసే ॥ 1

కావ్యారంభంలో, ఇష్టదేవతా ప్రార్థనచేస్తూ (సంస్కృతంలో), కావ్యరచనను ప్రారంభించడం నన్నయగారి పద్ధతి. మల్లన కూడా అట్లాగే శివుని స్తుతించి (సంస్కృతంలో) కావ్యరచన కుపక్రమిస్తాడు.

క. ప్రణమిల్లి శివున కీక్రియ,
నణిమాదిగుణాస్పదునకు నభినవసంఖ్యా
మణిదీప్తి సారసంగ్రహ
గణితసముద్రంబు దరువఁ గణఁగితిఁ బ్రీతిన్. 2

ఈ విధంగా శివునికి నమస్కరించి, సంఖ్యలు అనే కొత్తమణులతో నిండిన సారసంగ్రహగణితమనే సముద్రాన్ని దాటడానికి పూనుకొన్నాను.

శా. [1]అర్కాదిగ్రహసంచరగ్రహణకాలాన్వేషణోపాయమున్
దర్కవ్యాకరణాగమాదిబహుశాస్త్రప్రోక్తనానార్థసం

---

(1) ఒక ప్రతిలో నీపద్యమునున్నది.

క. నానాశాస్త్రంబులలో । నానార్థము లెఱుఁగువాని నానాగతులన్
నానాలెక్కలు దెలిపెద । భూనుతముగ గణితమందు బుధులు నుతింపన్.

పర్కాదివ్యవహారమున్ భువనరూపద్వీపవిస్తారమున్
దర్కింపన్ గణితప్రవృత్తి వెలిగాఁ దక్కొం డెఱింగించునే. 3

మూలంలోని 8 శ్లోకాలను సంక్షిప్తీకరించడం జరిగింది. సూర్యుడు మొదలైన తొమ్మిది గ్రహాల సంచారవిశేషాలు, గ్రహణ కాలాన్వేషణకు ఉపాయాలు, తర్కవ్యాకరణాది అనేకశాస్త్రాల వివరణలు, లోకస్వరూపం, ద్వీపవిస్తరణ....ఇవన్నీ తెలుసుకోవాలంటే గణితం తప్ప వేరేమార్గం లేదు.

క. **కావున గణితము దెనుఁగునఁ**
గావింపఁగఁ గణఁగితిని సుకవిమల్లుఁడ గౌ
రీవల్లభచరణసరో
జావాసితచిత్తమధుకరాత్ముఁడ జగతిన్. 4

కాబట్టి గణితాన్ని తెనుగుభాషలో వ్రాయడానికి పూనుకొన్నాను. నేను పరమేశ్వరుని పాదపద్మములలో నివసించే తుమ్మెదను, సుకవులలో మల్లుడను.

క. **ఇలఁ గమ్మనాఁటిలోపల**
విలసిల్లిన పావులూరివిభుఁడను సూత్రా
కలితాపస్తంబద్విజ
కులతిలకుఁడ వినుతగార్గ్యగోత్రోద్భవుఁడన్. 5

నేను కమ్మనాడులో (గుంటూరు సమీపంలోని ప్రాంతం) ఉన్న పావులూరు గ్రామాధికారి (కరణం)ని, బ్రాహ్మణవంశంలో, ఆపస్తంభసూత్రంలో గార్గ్యగోత్రజుణ్ణి.

ఉ. **శ్రీలలనేశుఁ డంధ్రనృపశేఖరుఁడై చను రాజరాజభూ**
పాలకుచేతఁ బీఠపురిపార్శ్వమునన్ నవఖండవాఁడయన్
ప్రోలు విభూతితోఁ బడసి భూరిజన[1] స్తుతుఁడైన సత్కళా
శీలుఁడు రాజపూజితుఁడు సివ్వనపుత్రుఁడు మల్లఁ దున్నతిన్. 6

(1) స్తవనీయ

ఆంధ్రనృపశేఖరుడు రాజరాజ నరేంద్రునిచే, పిఠాపురం సమీపంలో ఉన్న నవఖండ వాడ అనే అగ్రహారాన్ని గౌరవంగా పుచ్చుకొన్న లోకసన్నుతుడు, సత్కళాశీలుడు, రాజపూజితుడు సివ్వనకుమారుడైన మల్లన

ఉ. **[1]శ్రీనిలయుండు సివ్వనయుఁ జిమ్మనయున్ గుణసూర్య దేవుఁడున్**
ధీనిధి ప్రోలనార్యుఁడును దేజమునన్ రవితుల్యులై న యా
సూనుల నల్వురం బడసె సూరిజనస్తుతసత్యభారతీ
జ్ఞానులఁ బద్మగర్భువదనంబులు నాలుగుఁ బోల వారిలోన్. 7

సౌభాగ్యవంతుడు – సివ్వన, చిమ్మన, గుణసూర్యదేవుడు, ప్రోలన అనే, రవితుల్యులైన నలుగురు పుత్రులను కన్నాడు. బ్రహ్మదేవుని నాలుగు మోములవలె పాండిత్యంలో ప్రకాశించే ఆనలుగురిలో

క. **గోత్రపవిత్రుఁడు సద్గుణ**
పాత్రుండగు సివ్వనకును బతిహితశుభచా
రిత్రారుంధతి గౌరమ
ధాత్రీసతి కిర్వురకును దనయుఁడ జగతిన్. 8

పుణ్యచరిత్రుడు సద్గుణశోభితుడైన సివ్వన, పతిహిత శుభచరిత్ర, పతివ్రత అయిన గౌరమ దంపతులకు కుమారుడను.

సీ. **భాసుర సంజ్ఞా ప్రపంచాదివేదిక**
సకలార్ధపరికర్మజలసమృద్ధి
భిన్నాధికారగంభీరాంతరాళంబు
గాఢ ప్రకీర్ణ కగ్రాహనితతి
త్రైరాశికోర్మిసంతానంబు మిశ్రిత
సూత్రమణిప్రభాశోభితంబు

(1) ఈ పద్యమును పలువురు – ప్రాచీనలక్షణ గ్రంథకర్తలు తద్భవవ్యాజయతికి లక్ష్యముగా నుదాహరించిరి. నాల్గవచరణమున జ్ఞా–నల యతి తద్భవవ్యాజయతి.

వర్ణితక్షేత్రవిస్తీర్ణప్రభావంబు
లాలితఖాతపాతాళతలము

గీ. కరణసంశ్రితచ్ఛాయాధికారవేల
మఖిలవిద్వత్సుజనఘోష మనఁగఁ బరగు
గణితవారాశి సంఖ్యానమణిగణంబు
లుద్ధరింపంగ నజునకు నోప నగునె. 9

గణితం ఒక సముద్రం. వివిధ ప్రక్రియలనే జలాలతో నిండినది. భిన్నాల ప్రకరణం దానిలోతు. ప్రకీర్ణ సమస్యలనే మొసళ్ళు త్రైరాశికములనే తరంగాలు, మిశ్రగణిత సమస్యలనే రత్నాలు, వీటితో శోభిస్తూ, ఖాత వ్యవహారమనే పాతాళతలం కలిగి, పెక్కుతరణోపాయములతో పొంగుతూ, ఎందరో గణిత విద్వజ్జనుల ఘోషలతో ఉన్న ఈ సముద్రంలోని వివిధ మణులను సంగ్రహించడం అజునికి కూడా సాధ్యపడదు.

క. ఐనను దమతమశక్యం
బై నంత యెఱింగి చెప్పనగు నెవ్వరి కెం
దైనను గావున సూత్రిత
మైన [1]తదంశంబు చెప్పనగు నిజబుద్ధిన్. 10

అయినప్పటికీ, తమతమ శక్తికొలది తెలిసికొన్నంతవరకు సూత్రీకరించి యున్న శాస్త్రవిషయాన్ని స్వంతబుద్ధి నుపయోగించి చెప్పడం జరుగుతుంది.

సంజ్ఞాధికారము

ఆ. సంజ్ఞ లెఱుఁగకున్న సంఖ్యాన మెఱుఁగంగ
నేర రాదు గాన నిర్ణయముగ
భూమికాలధాన్య హేమతులాదుల
మాన మెఱుఁగదగుఁ గ్రమంబుతోడ. 11

(1) తదాశయము.

సంజ్ఞలు, కొలతలు లేకుండా, గణితశాస్త్రవిశేషాలు తెలుసుకోవడం కుదరదు. కాబట్టి తప్పనిసరిగా ఆయామానాలు తెలుసుకోవాలిగనక భూమిని, కాలాన్ని, ధాన్యాన్ని, బంగారును మొదలుగాగల వీటిని కొలవడం, తూకంవేయడాలను క్రమంగా తెలుసుకుందాం.

వ. అది యెయ్యది యనిన.

భూమిప్రమాణసూత్రము

సీ. [1]అవినాశియగు పరమాణువు మొదలుగాఁ
గొని యవి యష్టాష్టగుణితమైన
రాజితత్రసరేణురథరేణు కేశలీ
క్షాతిలబీజవర్షపయవాంగు
ళములౌను గ్రమమున; లక్షితాంగుళములు
పంద్రెండు జేనయై [2]పరుగుచుండు,
[3](నా?) నాల్గుజేనలు హస్తంబు, నాలుగు
హస్తముల్ దండమై యవతరిల్లు,

(1) 'అవినాశి పరమాణు, వదియాది, పెక్కవి యణు, వవి యష్టాష్టగుణిత మైన' అని యున్న చో మూలానుగుణమగును – లేక 'అవినాశియగుఁ బరమాణువు పెక్కవియణువది' అనియేని యుండఁదగును.

(2) పరుగునాల్గు । జేనలు హస్తంబు సిద్ధంబు నాలుగు

(3) ఆఱంగుళములు పాదమని, రెండుపాదములు (పంద్రెండంగుళములు) వితస్తి (=జేన) యని, రెండువితస్తులు హస్తమని, మూలము.

శ్లో. అంగుష్ఠవలయార్ధం తదంగుళం పరికీర్తితమ్ ।
తద్ద్వాదశ వితస్తిస్స్యాత్ తద్ద్వాత్రింశత్తు దండకమ్ ॥

ఇది కేసరిపాటి గడ ప్రమాణము అని శాసనము. 1920. నెం 659 శా.చూ. దక్షిణహిందూదేశ శాసనసంచయము.

ఆ. వెలయు [1]వేయుదండములు గ్రోశ [2] మవి నాలు
గొక్క యోజనముగ నొప్పుచుండు
గణితతత్త్వవిదులు గణుతించి చెప్పఁడి
ప్పాట భూమికొలత తేటపడఁగ. 12

ఇక్కడ మల్లన భూమి కొలతలను వివరిస్తున్నాడు. ఇదే దైర్ఘ్యమానం. ఊహాజనితమైన అత్యంతస్వల్పమైన పరమాణు కొలతలతో మొదలుపెట్టి, క్రమంగా, యదార్థమైన కొలతలను వివరించాడు. పరమాణువు కొలత $1/8^8$ అంగుళాలు (మహావీరాచార్యుని కొలమానం ప్రకారం) మల్లన తనకాలం నాడు వాడుకలో ఉండిన ఆంధ్రదేశంలోని కొలతలను ఉటంకించాడు.

పరమాణువునకు వినాశములేదనడం ఒక గొప్ప విజ్ఞానశాస్త్రఅంశం – గమనించతగ్గది.

8 పరమాణువులు	=	1 త్రసరేణువు
8 త్ర.రే.	=	1 రథరేణువు (రథచక్రం తొక్కిడికి ఎగసేరేణువు) 8×8=64 ప.అ
8 ర. రేణువులు	=	1 కేశలిక్ష= 8^3 ప.అ
8 కే.లీ	=	1 తిల= 8^4 ప.అ
8 తిల	=	1 ఆవ= సర్షపం= 8^5 ప.అ
8 ఆవలు	=	1 యవ= 8^6 ప.అ
8 యవలు	=	1 అంగుళం= 8^7 ప.అ
అంటే 1 అంగుళం	=	20,97,152= 8^7 పరమాణువులు

త్రస అంటే వేదపఠనమప్పుడు నోటినుండి వెలువడే లాలాజలకణం

ఇక భూమి కొలవడానికి పెద్దపరిమాణాలు కావాలి కదా: అవి

(1) రెండువేల దండములు క్రోశమని మూలము.

(2) మదియును । నాల్గు నొక్క యోజనంబు గాఁగ

12 అంగుళాలు	=	1 జేన
4 జేనలు	=	1 హస్తం
4 హస్తాలు	=	1 దండం
1000 దండాలు	=	1 క్రోశం
4 క్రోశాలు	=	1 యోజనం

క. ఇది గణితశాస్త్రపద్ధతి
చదివిన దండంబు దీనిచాయకు రాఁగా
ముదమునఁ గొలిచిన కోలలు
గదియఁగ నూహించుకొనుఁడు గణితవిధిజ్ఞుల్. 13

ఇది గణితశాస్త్రపద్ధతి. ఈ కొలతలతో కోలల (కొలబద్దలు–నాటి ఆంధ్రదేశంలో వ్యవహరింపబడేది)ను గణితజ్ఞులు ఊహించుకొనగలరని విన్నపం.

కుంటప్రమాణసూత్రము

క. మానుగ నిడుపు వెడల్పును
గా నొక్కొకకోల కుంట, కదియఁగఁ బుట్టిం
దేనూఱుకుంట, లిరువది
యేనొక తూమెఁడు, తదర్థ మిరు సనఁబరగున్. 14

పొడవు ఒక కోల, వైదల్పు ఒక కోల అయితే అది కుంట
ఒకకోల= ఒకదండము= నాలుగు హస్తములు

500 కుంటలు	=	1 పుట్టి
25 కుంటలు	=	1 తూము
12½ కుంటలు	=	1 ఇరుసు

క. కానులు మొదలుగఁ జిన్నము
మానుగఁ గోలయును గుంటమానము మఱి భూ

మానము ధాన్యముతోడ స
మానముగా వ్యవహరింత్రు మహి [1]సంద్రజనుల్. **15**

ఆంధ్రులు 'కానులు, చిన్నము, కోల' అనే కొలమానాలను కుంట కొలతకు. భూమి కొలమానం; వీటినే ధాన్యప్రమాణానికి సమానంగా ఉపయోగిస్తారు.

ఉదక ప్రమాణసూత్రము

క. మానుగ, నేకాంగుళఘన
మానము నీరయ్యె రెండుమాడల యెత్తా
మానమ్ము నూఱు గడెల స
మానము కుంచెంటి నీరు మానంబయ్యెన్.[2] **16**

---

(1) సంస్కృతమూలకారుఁడు భూమ్యాదిమానములను మగధదేశపు సంప్రదాయము ననుసరించి వ్రాసితినెను. ఆంధ్రరచయిత సంస్కృతమూలమును బాటింపలేదు. తానాంధ్రదేశపు సంప్రదాయమునుబట్టి భూమ్యాదిమానములఁ జెప్పితినెను. ఈప్రకరణమున మూలమునకుఁ దెలుఁగునకుఁ జాలభేదములున్నవి

(2) ఇక్కడ కొన్ని ప్రతులలో నీక్రింది పద్యములున్నవి.

క. అంగుళపు లోఁతు కుంటకు । సంగతిగా గరిసె యెత్తు జలములభంగిన్
అంగీకులు కల్పించిరి । గంగాధర నూతిబావి గలతోయంబుల్ ॥

క. అర యర పెంపఁగఁ బాతిక । యర పాతికఁ బెంపఁ బరక యాలాగున నే
యర పరకఁ బెంప వీసము । నర వీసములయ్యెఁ గాని యయ్యెయెడలన్ ॥

క. పాతిక పాతిక పెంచిన । ఖ్యాతిగ వీసంబు లయ్యెఁ గ్రమ్మఱ వీసాల్
పాతికలఁ బెంపఁ గానులు । ప్రీతిగ వీసములఁ బెంపఁ బిరలగుచుండున్ ॥

క. పిర పిరఁ బెంచిన సుర యగుఁ । బిర వీసములకును నంశ ప్రీతిగ నుండున్
పిరకుంగా నిశ్శేషము । పిర పిరతోఁ బెంప లిప్త ప్రీతిగనుండున్ ॥

సీ. ప్రతులకుఁ బాతిక పాతికల్తోఁ బెంపఁ బరగ పోడశసంఖ్య పాలుగొనఁగ
బాగొప్ప వీసముల్తో గుణియించియు షట్పంచకద్వయసంఖ్య గొనఁగ
కానులు కానులతో నెత్తి మఱియును ఋతునిధిగగనాబ్ధివితతి చేత
భాగహారము సేయఁ బరగినలబ్ధముల్ చిన్నంబుల నడంగుఁ బన్ను గాను

నీటిఘనపరిమాణమానము: కుంచెడునీరు= 100 గడెలు
1 అంగుళం ఘనం= 100 గడెలు
కుంటభూమిపైన 1 అంగుళం ఎత్తు=2 మాడల ఎత్తుగలనీరు: 1 కుంచం

కాలప్రమాణసూత్రము

క. కను మూసి తెప్ప యెత్తుటఁ
జనుకాలము నిమిష మగును జయ్యన నవి దాఁ
దనరుఁ బదునెనిమిదైనను
వినుమిది యొక కాష్ఠయగును వెలయఁగ ధరణిన్. **17**

కనుమూసి తెరుచుకాలం (కనురెప్పపాటు)= 1నిమిషము (మినిట్‌కాదు)
18 నిమిషాలు = 1 కాష్ఠ

తే. నిమిష మష్టదశత నెఱయఁగఁ గాష్ఠయౌఁ
గాష్ఠ త్రిదశకమ్ము గళకు నమరు
కళయుఁ ద్రిదశకంబు క్షణ మనఁ బరగును
క్షణము లాఱు గూడ గడియ యయ్యె. **18**

30 కాష్ఠలు = 1 కళ
30 కళలు = 1 క్షణం
6 క్షణాలు = 1 గడియ

చ. గడియలు రెండు మూర్త మనఁగాఁజను ముప్పది మూర్తముల్ దినం
బొడఁబడ నయ్యెఁ దద్దినదశోత్తరపంచక మేకపక్షమై
నడచు ధరిత్రిఁ బక్షమిథునం బొకమాసము మాసయుగ్మ మే
ర్పడ ఋతువయ్యెఁ గాలమితిపద్ధతి నాఋతుషట్క మేఁ డగున్. **19**

గీ. కువలయమున గడలు కుంటలు మొదలుగ । భూమికాలధాన్య హేమములకు
సూత్ర మిదియ చుమ్ము సురుచిరబుద్ధిని । గణితవేదులైన గణకులార ॥

2 గడియలు	=	1 మూర్తము
30 మూర్తములు	=	1 దినము (60గడియలు, నేటి 24 గంటలు)
15 దినములు	=	1 పక్షము
2 పక్షములు	=	1 నెల, 1 మాసము
2 మాసములు	=	1 ఋతువు
6 ఋతువులు	=	1 ఏడు, 1 సంవత్సరము.

ఇక్కడ గడియ (అంటే ఘటిక) అన్నది నేటి మన 24 నిమిషాలకు సమానము, 2½ గడియలు= 1 గంట.

ధాన్యప్రమాణసూత్రము

క. **నవశతధాన్యము సోలెం**
దవి నాలుగు మాన మాన లన్నియె కుంచం
బవి నాలుగు తూ మనఁగా
నవి యిరువది పుట్టి యయ్యె నంధ్రావనిలోన్. [1] **20**

900 గింజెలధాన్యం	=	1 సోలెడు, సోల
4 సోలలు	=	1 మాన
4 మానలు	=	1 కుంచము
4 కుంచాలు	=	1 తూము
20 తూములు	=	1 పుట్టి

కాంచనప్రమాణసూత్రము

క. **నాలుగు గోకరకానులు**
పోలఁగ సురకాని యయ్యెఁ బొలు పమరంగా
నాలుగు సుర లొక పిర యగు
నాలుగు పిర లొక్క కాని నరనుతచరితా. **21**

(1) తర్వాత నీక్రింది పద్యము కొన్ని ప్రతులలో నున్నది.
గీ. కొమరుగాను నాల్గుకుంచంబు లగుఁ దూము। నేను తూములయిన నేదు మగును।
నేదుము లవి నాలు గేర్పడఁగా నవి। కయలు పుట్టి యనఁగ గణుతికెక్కె ॥

4 గోకర కానులు	=	1 సురకాని
4 సురలు	=	1 పిర
4 పిరలు	=	1 కాని

క. **నాలుగు కానులు వీసము**
నాలుగు వీసములు గూడిననుఁ బాతికయౌ
నాలుగు చిన్నము పది చి
న్నా లొకమాడ యిది కాంచనపుమాన మగున్. **22**

4 కానులు	=	1 వీసము
4 వీసములు	=	1 పాతిక
4 పాతికలు	=	1 చిన్నము
10 చిన్నములు	=	1 మాడ.

క. [1]**మాడలు మూఁడును దుల మగు**
వీడక యిరువదియు నాల్గనే తులము లొడం
గూడిన సే రగు నయ్యవి
యోడకయై దైన వీసె యుగ ధరఁ బరగున్. **23**

3 మాడలు	=	1 తులము
24 తులములు	=	1 శేరు, సేరు
5శేర్లు	=	1 వీసె (వీశె)

(1) ఇది పెక్కు ప్రతులలో లేదు.
కొన్ని ప్రతులలోఁ బై పద్యములకు మాఱుగా, వేఱుగా మూఁడు పద్యములున్నవి

క. విదితంబుగ నమ్మాడలు। పదు నెనిమిది గూడె నేని పలమెం డగు ని
ర్వదిపలము లయిన వీసెఁడు। సదమలముగఁ జెప్ప నయ్యె సంజ్ఞలుమాకున్.॥

గీ. అరయు నాల్గు మాడ లవియొక్క కరిసెడు। నాల్గు కరిసెలైన నగు పలంబు
పలము లొక్క నూఱు తులయగుఁ దులలొక్క। యిరువదైన బారు విదిమతంబు ॥

గీ. నాల్గు మాడలైన నరయొక్క కరిశెడు। నాల్గు కరిశెలయిన నమర పలము
పలము లిరువదైన బరగంగ నొకవీసె। నూఱువీసెలైన బారువయ్యె ॥

క. వీసెలు రెండొక యెత్తగు
వీసెలు దా నెనిమిదైన వెస మణుగు ధరన్
దేశవ్యవహారంబున
వీసెలు నూటఱువదైన వెసఁ బుట్టెఁ దగున్. **24**

2 వీసెలు	=	1 ఎత్తు
8 వీసెలు (4 ఎత్తులు)	=	1 మణుగు
160 వీసెలు	=	1 పుట్టి

తులాప్రమాణసూత్రము

ఉ. నాలుగు వడ్లు గుంజయగు, నాలుగు గుంజలు రూక, రూకలున్
నాలుగు నొక్కటైన ధరణం, బవిరెం డొకగద్దె, గద్దెలున్
నాలుగు కర్షమాన, మవినాలుగు గూడఁ బలంబు, వీసె నాఁ
జాలుఁ దదీయవింశతి, నిజం బవి నూటొక బారువై చనున్. **25**

4 వడ్లు	=	1 గుంజ
4 గుంజలు	=	1 రూక
4 రూకలు	=	1 ధరణము
2 ధరణాలు	=	1 గద్దె
4 గద్దెలు	=	1 కర్ష
4 కర్షలు	=	1 పలము
20 పలములు	=	1 వీసె
100 వీసెలు	=	1 బారువు

సీ. పదియాఱు వీసాలు పరికింపఁ జిన్నంబు
పది చిన్నములు గూడఁబడినమాడ
పరగ మాడెత్తులు పదియును నెన్మిది
పల, మవి రెండైనఁ బావుసేరు

పావులు నాల్గైనఁ బాటిగా నొక సేరు
[1]సేరులు పదియైనఁ జెల్లు ధణెము
ధణియాలు. నాల్గైనఁ దలపోయ మణుఁగగు
మణుఁగు లిర్వదియైన మహిని బుట్టి

ఆ. వహిని లెక్క యిట్లు వర్ణించి తెలియుఁడీ
[2]మఱియు సంజ్ఞలెన్ని మహిని గల్గు
నన్ని సంజ్ఞలకును నాధార మిదియగు
గణిత మెఱిఁగినట్టి గణకులకును. **26**

16 వీసములు	=	1 చిన్నము
10 చిన్నములు	=	1 మాడ
18 మాడలు	=	1 పలము
2 ఫలములు	=	¼ సేరు, పావుసేరు
4 పావుసేర్లు	=	1 సేరు
4 సేర్లు	=	1 ధణెము, ధడియం
4 ధణియలు	=	1 మణుగు
20 మణుగులు	=	1 పుట్టె

క. [3]ఎత్తుగల లోహములకును
నెత్తెడు రసవర్గములకు నిలలోఁ దెలియన్
నత్తగు ధాన్యంబులకును
బుత్తడికిని నిర్వ దయ్యెఁ బుట్టికి మణుఁగుల్. **27**

---

(1) అవి పదియైన దళాయి యంద్రు । ఆ దళాయులు నాలు గమరంగ మణుగగు తనరంగఁ బదిసేర్లు దాళువంద్రు । నాలుగు దాళువల్ నయముతో మణుగగు నిరువది మణుఁగుల నెసగుఁ బుట్టి

(2) మహిత.

(3) ఇది కొన్నింట లేదు.

రసవస్తువులు (తైలములు, ఉప్పు, చింతపండు మొదలైన) ధాన్యములు, లోహములు, బంగారుతో సహాతూకము వేసి క్రయ విక్రయములు చేసేవి. వీటికి అన్ని సందర్భాలలో 20 మణుగులు = 1 పుట్టె.

క. [1]ఆవాలు నాలు గైనను
భావింపఁగ వీస [2]మంద్రు పాటిగ ధరలో
నా వీసద్వయ మయినను
లావుగ జవ యెత్తు తూఁగు లాలిత్యముగన్. 28

4 ఆవాలు	=	1 వీసము
2 వీసములు	=	1 జవ

గీ. రెండు జవలు గుంజ రీతితో గుంజలు
రెండు వల్ల మనఁగ నుండు ధరణి
వల్లము[3] లవి నాల్గు వరుసతో మాషంబు
దగును దులకు నవియు ద్వాదశంబు. 29

2 జవలు	=	1 గుంజ
2 గుంజలు	=	1 వల్లము
4 వల్లములు	=	1 మాష
12 మాషలు	=	1 తులము

(1) ఇది మొదలు మూఁడు పద్యములకు బదులుగాఁ గొన్ని ప్రతులలో నీక్రింది పద్యమున్నది.

సీ. ఆవాలు నాలుగు భావింప వీసంబు వీసద్వయము జవ నెలయుచుండు
రెండుజవలు గుంజ రీతితో గుంజలు రెండు వల్లముగఁ గీర్తింపఁబడును
వల్లముల్ నాలుగు చెల్లిన మాషంబు దగుఁ దులమున కవి ద్వాదశంబు
తెలియంగవలయు నీతీరున లెక్కింపఁ దులము లిర్వదినాల్గు తూఁగు నేరు

ఆ. సేరు లెనబనూఱు చెల్లును ధరమీఁద । వహిని బుట్టి యనఁగ వరుసతోడ
గణితశాస్త్రసంజ్ఞ గనుఁగొని తెలియుఁ డీ । సన్నఁ దూనికలకు సంజ్ఞ లెల్ల ॥

(2) మెత్తు, (3) లునునైదు

క. ఇరువదినాలుగు తులములు
చిరకీర్తన! సే రనంగఁ జెన్ను వహించున్
నిరతముగ నెన్న నూఱవి
ధరణిపయిం బుట్టి యనఁగఁ దద్దయు నమరున్. 30

24 తులములు	=	1 సేరు
100 సేర్లు	=	1 పుట్టె

సీ. ఇల వీసములు రెండు గలసినఁ బరకెత్తు
పరకలు రెండైనఁ బాతికెత్తు
పాతికల్ రెండైన పరగంగ నడ్డిగ (నడ్డుగ)
చిన్నాన కవి రెండు చెల్లుచుండు
అడ్డుగ లయిదైన నమరంగఁ జవిలె యౌఁ
సరి చవిలెలు రెండు ధరణ మగును
ధరణంబు లవిరెండు దనరును మాడగా
మాడలు మూఁడైన మఱియుఁ దులము
తులములు నాల్గైనఁ దోరంపుఁ బావగు
పావులు నాలుగు పరగ సేరు
[1]సేరులైదుగూడఁ జెప్పంగఁ దక్కెడ
తక్కెడద్వయమైన ధరణి నెత్తు
నెత్తులు నాల్గైన నెసగంగ మణుఁగగు
నైదుమణ్గులు గూడ నేఁదుమయ్యె

(1) ఇక్కడనుండి యీక్రింది పాఠాంతరములు కలవు.

(i) సేరు లయిదు గూడఁ జెప్పంగఁ దక్కెడ । తక్కెడలు నెనిమిది ధరణి మణుఁగు
మణుఁగులు పదియైన మహిలోనఁ బందుము । పందుములును రెండు పరగుఁ బుట్టి

(ii) పేరులు పదియైనఁ జెప్పంగఁ దక్కెడ । తక్కెడలును నాల్గు ధరణి మణుఁగు
మణుఁగులు పదియైన మహిలోనఁ బందుము । పందుములును రెండు పరగుఁ బుట్టి

నేఁదుముల్ రెండైన నిలఁ బందు మందురు
రెండు పందుములైన నిండుపుట్టి

ఆ. వహిని బుట్లలెక్క వరుసతో లెక్కింప
గణకవర్యులార! కలుగు నిట్లు
లెక్క లెల్ల నిట్టి వక్కళతోఁజూచి
చెప్పవలయు నెపుడు చిత్రమగును. 31

2 వీసములు	=	1 పరక
2 పరకలు	=	1 పాతిక
2 పాతికలు	=	1 అడ్డిగ (అడ్డుగ)
2 అడ్డిగలు	=	1 చిన్నము
5 అడ్డిగలు	=	1 చవిలె
2 చవిలెలు	=	1 ధరణము
2 ధరణములు	=	1 మాడ
3 మాడలు	=	1 తులము
6 తులములు	=	1 పావు
4 పావులు	=	1 సేరు
5 సేరులు	=	1 తక్కెడ
2 తక్కెడలు	=	1 ఎత్తు
4 ఎత్తులు	=	1 మణుగు
5 మణుగులు	=	1 ఏదుం
2 ఏదుములు	=	1 పందుం
2 పందుములు	=	1 పుట్టె

పుట్లలెక్క ఈవిధంగా ఏర్పడుతుంది కాబట్టి అక్కఱనుబట్టి గణకవర్యులు ఇట్లా లెక్కించి చెప్పాలి.

సీ. [1]విను జొన్నగింజెత్తు వీస మనం జను
రెండువీసములైన నిండు పరక
పరకలు రెండైనఁ బాతిక [2]పాతిక
ద్వయ మడ్డి గడ్డిగ ద్వయము రూక
రూకలు పది మాడ రూఢి మాడలు మూఁడు
తులము తులములైదు పలము వెలయు
పలములు నాలుగు పరువడి సేరగు
నొనర సేరులు నైదు నొక్కవీసె

గీ. వీసె లవి రెండు నొక్కట విన ధటంబు
మహి ధటంబులు నాలుగు మణుఁ గనంగఁ
బరగు మణుఁగులు పండ్రెండు బారు వగును
మానుగా నిది తూనికమాన మగును. 32

బరువులకు మరొక తూనికమానం

1 జొన్నగింజ ఎత్తు	=	1 వీసం
2 వీసములు	=	1 పరక

---

(1) ఈ క్రింది పద్యము కొన్ని ప్రతులలోనే కలదు.

సీ. నాల్గునేబుల యెత్తు నలిఁ బావుసేరగుఁ బావుసేరులు నాల్గు పరగ సేరు
సేరులు పదియైన సిద్ధమౌ నోకయెత్తు నెత్తులు నాల్గైన నిలను మణుఁగు
మణుఁగులు నైదైన మతి పంచకంబును పంచకంబులు నాల్గు పరగఁ బుట్టి
....
వహినిఁ బుట్టిలెక్క వర్ణించి తెలియుఁడీ గణకులయినవారు క్రమముతోడ.

(2) లవిరెండు నడ్డుగదద్ ద్వయం బమర రూక
రూకలు పదియైన రూఢిగా మాడయ్యె మాడలు మూడైన మహినిఁదులము
తులములాఋ....................గపేరు
సేరులైదొక్క వీసెను జెలువు మిగులు । వెలయ వీసెలు రెండై న విను దళంబు
మహి దళంబులు నాలుగు మణుఁగు మణుఁగు । లవియుఁ బండ్రెండు.

2 పరకలు	=	1 పాతిక
2 పాతికలు	=	1 అడ్డిగ
2 అడ్డిగలు	=	1 రూక
10 రూకలు	=	1 మాడ
3 మాడలు	=	1 తులము
5 తులములు	=	1 పలము
4 పలములు	=	1 సేరు
5 సేర్లు	=	1 వీసె
2 వీసెలు	=	1 ధటము
4 ధటములు	=	1 మణుగు
12 మణుగులు	=	1 బారువు

క. **ఏకస్థానము మొదలుగ**
నేకైకము దశగుణముల నెక్కిన సంఖ్యా
నీకస్థానాఖ్యలకు వి
వేకము షట్త్రింశక మయి విశ్రుత మయ్యెన్. 33

ఒకట్లస్థానం మొదలు ఒక్కొక్కటి పదిరెట్లుగా పెంచుతూ, ఆయాస్థానాలకు పేర్లుపెడుతూ వెళ్ళితే 36స్థానాలవరకు వాటిపేర్లు :

శ్లో. [1]**ఏకంతు ప్రథమం స్థానం ద్వితీయం దశసంజ్ఞకమ్**
తృతీయం శత మిత్యాహుః చతుర్థం తు సహస్రకమ్
పంచమం దశసాహస్రం షష్ఠం స్యాల్లక్ష మేన చ
సప్తమం దశలక్షంతు అష్టమం కోటి రుచ్యతే
నవమం దశకోటిస్తు దశమం శతకోటయః
అర్బుదం రుద్రసంఖ్యాచ న్యర్బుదం ద్వాదశం భవేత్

(1) ఇవిమూలశ్లోకములే.

ఖర్వం త్రయోదశస్థానం మహాఖర్వం చతుర్దశమ్
పద్మం పంచదశం చైవ మహాపద్మంచ షోడశం
క్షోణీ సప్తదశంచైవ మహాక్షోణీ దళాష్టకమ్
శంఖం నవదశం స్థానం మహాశంఖం తు వింశతిః
క్షిత్యైక వింశతిః స్థానం మహాక్షిత్యాద్వివింశతిః
త్రివింశక మథ క్షోభం మహాక్షోభం చతుర్నయమ్[1]
నిధిశ్చ పంచవింశత్యా షడ్వింశత్యా మహానిధిః
పరతం సప్తవింశత్యా అనంతం చాష్టవింశతిః
నవవింశ తృథో భూరి మహాభూరి దశత్రికమ్
ఏకత్రిదశకం మేరుః మహామేరు ర్ద్విషోడశమ్
త్రిత్రింశం బహుశం స్థానం చతుస్త్రింశంచ బాహుశమ్
పంచత్రింశం సముద్రంచ షట్త్రింశం సాగరం భవేత్

వ. **ఏకం, దళం, శతం, సహస్రం, దశసాహస్రం, లక్షం, దశలక్షం, కోటి, దశకోటి, శతకోటి, అర్బుదం, న్యర్బుదం, ఖర్వం, మహాఖర్వం, పద్మం, మహాపద్మం, క్షోణి, మహాక్షోణి, శంఖం, మహాశంఖం, క్షితి, మహాక్షితి, క్షోభం, మహాక్షోభం, నిధి, మహానిధి, పరతం, అనంతం, భూరి, మహాభూరి, మేరు, మహామేరు, బహుశం, సముద్రం, సాగరం, ఈ ముప్పదియాఱును స్థానముల సంజ్ఞలు. 34**

ఒకట్లు, పదులు, నూర్లు, వేలు, పదివేలు, లక్ష, పదిలక్షలు, కోటి, పదికోట్లు, వందకోట్లు, అటుపైన

అర్బుదం	=	వెయ్యికోట్లు
న్యర్బుదం	=	10వేల కోట్లు
ఖర్వం	=	లక్షకోట్లు
మహాఖర్వం	=	10లక్షలకోట్లు
పద్మం	=	కోటి కోట్లు

1. సంస్కృతమున మహాక్షోభాంతముగా నిర్వదినాల్గు స్థానములే చెప్పఁబడినవి.

మహాపద్మం	=	పదికోట్ల కోట్లు
క్షోణి	=	100 కోట్ల కోట్లు
మహాక్షోణి–మహకోణి	=	వెయ్యికోట్ల కోట్లు
శంఖం	=	10వేల కోట్ల కోట్లు
మహాశంఖం	=	లక్షకోట్ల కోట్లు
కితి	=	10లక్షల కోట్ల కోట్లు
మహాక్షితి	=	కోట్ల కోట్ల కోట్లు
క్షోభం	=	పదికోట్ల కోట్ల కోట్లు
మహాక్షోభం	=	100 కోట్ల కోట్ల కోట్లు
నిధి	=	వెయ్యికోట్ల కోట్ల కోట్లు
మహానిధి	=	పదివేల కోట్ల కోట్ల కోట్లు
పరతం	=	10×మహానిధి
అనంతం	=	10×పరతం
భూరి	=	10×అనంతం
మహాభూరి	=	10×భూరి
మేరు	=	10×మహాభూరి
మహామేరు	=	10×మేరు
బహుశం	=	10×మహామేరు
బాహుశం	=	10×బహుశం
సముద్రం	=	10×బాహుశం
సాగరం	=	10×సముద్రం

గమనిక: మూల సంస్కృత గ్రంథంలో మహావీరాచార్యుడు మహాక్షోభం (10^{23}) వరకు చెబితే, మరి 12 స్థానాలు: నిధి (10^{24}) నుండి సాగరం (10^{35}) వరకు మల్లన పొడిగించాడు –

సంఖ్యా పరిభాష

వ. తొమ్మిది లెక్కలకును బరిభాషసంజ్ఞలు

శ్లో. శశీ సోమ శ్శశాంకశ్చ ఇందు శ్చంద్రశ్చ రూపకమ్
ప్రళయం భూమి నిలయం మృగాంకశ్చ కళాధరః
భూవాచకాస్తు శబ్దా యే ఏకస్థానస్య వాచకాః
అక్షి చక్షుః కరం నేత్రం లోచనం బాహు కర్ణకమ్
పక్షదృష్టీ ద్వయం యుగ్మ మంబకం నయనాఖ్యకమ్
వహ్నీ రామ శ్శిఖీ రత్నం పావకో దహనోనలః
శంకరాక్షి పురీ లోకాస్త్రయః కాలా స్త్రయో గుణాః
అబ్ధి సాగర బ్రహ్మాస్య వనరాశి యుగార్ణవాః
చతు ర్వార్ధి ర్వేదా జలధి ర్నీరధి స్తథా
ఇంద్రియం పంచమం జ్ఞానం కావ్యం బాణశ్చ మార్గణః
వ్రతభూతవిషయశరముష్టికళ్యాణభూషణమ్
ఋతు శాస్త్ర రసం చైవ షద్దర్శన షడంగకమ్
తర్కం షడ్గుణ షట్కంచ ద్రవ్యార్థం ఋతవస్తథా
అద్రిశైలనగా అశ్వా స్సప్త చాచలగోత్రకాః
ముని ర్గిరి తురంగౌ చ నగదారా (ఘావయోః)
అష్టమం గజకర్ణచ దిగ్గజం దన్తిహస్తికమ్
ద్విరదం మత్తమాతంగ పన్నగా వసువారణాః
నవమం నందనంచైవ బ్రహ్మపురుషపరార్థకమ్
నిధిగ్రహశ్చనేధాశ్చ భవలబ్ధంచరంధ్రకమ్
ఆకాశం గగనం శూన్యం అంబరంచ మరుత్పథమ్
[1]తారాపథం విష్ణుపదం వ్యోమ ఖం దివి పుష్కరమ్.

(1) అర్థమొకటే అయినను సంస్కృతమూలమున నున్నశ్లోకములు వేఱు ఇవి వేఱు. ఈ శ్లోకములుకూర్పు సరిగా లేదు.

మల్లన తన సంఖ్యానిఘంటువులో ఒకటి నుండి తొమ్మిది వరకు ఉన్న అంకెలకు తాను ఉపయోగించిన పర్యాయపదాలను (సంకేతాలు) వివరిస్తున్నాడు. సున్నను చివర తీసుకొన్నాడు.

గమనిక: మల్లన తన సంఖ్యానిఘంటువులో 1 నుండి 9నే సంఖ్యలు (అంకెలు)గా పరిగణించి, 0 (సున్న)ను చివరకు నెట్టాడు. అంటే సున్నను సంఖ్యగా పరిగణించక, ఒక సంకేతంగా, ఒక సంజ్ఞగానే భావించినట్లున్నది. నేటికీ మనం టైపురైటర్ కీబోర్డు, మొబైలుఫోన్లమీద ఇదే భావాన్ని కొనసాగిస్తున్నాము. సున్న ఒక సంఖ్యగా పరిగణిస్తే, అది అంకె 1 కంటే ముందుగా గుర్తించవలె.

1. = శశి, సోమ, శశాంక, ఇందు, చంద్ర, రూపకం, ప్రళయం, భూమి, నిలయం, మృగాంక, కళాధర, భూ (12 పేర్లు)

2. = అక్షి, చక్షు, కరం, నేత్రం, లోచనం, బాహు, కర్ణకం, పక్ష, దృష్టి, ద్వయం, యుగ్మం, అంబకం, నయనం; (13పేర్లు)

3. = వహ్ని, రామ, శిఖి, రత్నం, పావక, దహన, అనల, శంకరాక్షి, పురి, లోక, త్రయ, కాల, త్రయో, గుణ (14పేర్లు)

4. = అబ్ధి, సాగర, బ్రహ్మాస్య, వన, రాశి, యుగ, అర్ణత, చతుః, వార్ధి, వేద, జలధి, నీరధి (12పేర్లు)

5. = ఇంద్రియ, పంచమం, జ్ఞానం, కావ్యం, బాణ, మార్గణ, వ్రత, భూత, విషయ, శర, ముష్టి, కల్యాణ, భూషణ (13పేర్లు)

6. = ఋతు, శాస్త్ర, రస, షడ్దర్శన, షడంగక, తర్క, షడ్గుణ, షట్క, ద్రవ్య, అర్థ (10పేర్లు)

7. = అద్రి, శైల, నగ, అశ్వ, సప్త, అచల, గోత్ర, ముని, గిరి, తురలగ, అఘ (11పేర్లు)

8. = అష్టమ, గజకర్ణ, దిగ్గజ, దంతి, హస్తి, ద్విరద, మాతంగ, పన్నగ, వసు, వారణ (10పేర్లు)

9. = నవమం, నందనం, బ్రహ్మ, పురుష, పరా, అర్థక, నిధి, గ్రహ, వేధా, భవలబ్ధ, రంధ్ర (11పేర్లు)

0. = ఆకాశం, గగనం, శూన్యం, అంబరం, మత్పథం, తారాపదం, విష్ణుపదం, వ్యోమ, ఖ, దివి, పుష్కర (11పేర్లు)

గ్రంథకర్తృప్రతిజ్ఞ

వ. మఱియు నామ్నాయంబులకుఁ బ్రణవంబునుంబోలె సకల గణితంబులకుఁ బ్రథమపరికర్మంబై గుణకారవిఖ్యాతంబగు గుణకారంబును భాగనిర్ణయప్రవరక్తంబగు భాగహారంబును, క్షేత్రగణిత వ్యవహార ప్రమాణనిర్ణ యస్వరూపంబై విలసిల్లు వర్గవర్గమూలంబును ఖాతగణిత లక్షణప్రమాణపరీక్షాదక్షంబగు ఘనఘనమూలంబును వాణిజ్య వ్యవహారపదం బై యాదాయవ్యయనిర్ణయంబులను నాలయంబైన సంకలిత వ్యుత్కలితంబులును నని చెప్పనొప్పునయ్యష్టాధికారంబులు గల్గు సారసంగ్రహ పరికర్మగణితప్రకారంబును, భిన్న వ్యవహారపదంబై భిన్న ప్రశ్నలకు దావలంబైయష్టాధికారంబులు గల్గు భిన్నగణితప్రకారంబును బుద్ధికి నాలయంబై యుక్తికి వాసంబై వ్యక్తప్రశ్నలకు నాకరంబై సూక్ష్మవిచక్షణప్రకీర్ణంబైన ప్రకీర్ణగణితప్రకారంబును క్రయవిక్రయ తులాదినిర్ణ యజీవితఋణవృద్ధులుయు మొదలయినలోక వ్యవహారంబులకు నున్కిపట్టయిన త్రైరాశికపంచరాశికసప్త రాశికనవరాశికైకాదశరాశికంబులంగల త్రైరాశికగణితప్రకారంబును సువర్ణరజతరత్న చామరకర్పూర కస్తూరికాది వస్తువులక్రయవిక్రయప్రకారనిర్ణయ ప్రపంచమేళనం బైన మిశ్రగణితప్రకారంబును చతుర మవిషచతురత్రికోణావృత్త ధనురాకార మురజ కణయ శూర్పాకా రాంతర్బహిః కోణంబులు మొదలయిన క్షేత్రంబుల గణితనిర్ణయ ప్రమాణ వ్యవహార పాత్రంబగు క్షేత్రగణిత

ప్రకారంబును, వాపీకూపతటాకాదికృతకవాహినీ ఖాతవ్యవహారపదలక్షణ ఖ్యాతంబైన ఖాతగణితంబును, ప్రాసాదగోపురస్తంభవృక్షచ్ఛాయామానావిలంబిత విచక్షభేదనిర్ణయంబైన ఛాయాగణితంబును ([1]కలాసవర్ణ నిర్ణయంబైన సువర్ణ గణితంబును లోకవ్యవహారములకు సకల సారంబైన సూత్రగణితంబునను ననదశ (నవ?) ననియష్ట గణితంబు లగురుబుద్ధులకగ్రాహ్యంబులు అందుఁ గొంతకొంత గురూపదిష్ట ప్రజ్ఞావిశేషంబున బుధుల యనుగ్రహంబున గురువులయనుమతంబున నంధ్రభాష గద్యపద్యరూపంబుల రచియించెద.[2] 36

మల్లన తన గ్రంథంలో వివరించ పూనిన దశవిధ గణితములను దానికి సంబంధించిన ఇతర అధ్యాయాలను ప్రతిజ్ఞాపూర్వకంగా వివరించడం జరిగింది.

“వేదాలకు ఓంకారం లాగే గణితంలో గుణకారం ఆదిమం” అంటున్నాడు మల్లన. మనం మొదట కూడికలు, తీసివేతలు నేర్చుకొని, తరువాత గుణకార, భాగహారాలకు వెళ్తాము.

---

(1) ననం గల్గు గణితంబులఁ గల సాగంబెల్ల సంగ్రహింపఁ బడ్డసారసంగ్రహ గణితంబును స్వస్తిక సర్వతోభద్ర చతుర్భద్ర చతుశ్శాలాది గృహపద్వైగైకాదశవర్గంబులు నిర్ణయించు వాస్తులక్షణంబును నానావర్ణమిశ్రితవర్ణంబును నానావర్ణ సువర్ణ క్రయవిక్రయంబును హీనవర్ణకనకంబును శ్రేష్ఠవర్ణంబు సేయు తెఱంగును శ్రేష్ఠవర్ణ సువర్ణంబును ఇచ్ఛావర్ణంబుసేయు తెఱంగునుం గల సువర్ణ గణితంబును గొంతకొంత

(2) సంస్కృతమున 1 పరికర్మ 2 భిన్న 3 ప్రకీర్ణ 4 త్రైరాశిక 5 మిశ్ర 6 క్షేత్ర 7 ఖాత 8 ఛాయాగణితములని యెనిమిది గణితములున్నవి. అయిదవదగు మిశ్రగణితమే తెలుగున సూత్ర సువర్ణ గణితములని రెండుగా విభక్తమయినది. కవి పద్యరూప ప్రతిజ్ఞలో ‘మిశ్రితసూత్రమణిప్రభాశోభితంబు’ అన్నాఁడు కాని సువర్ణగణితమును వేఱుగాఁ జెప్పలేదు. కాఁగా సంస్కృతమున నెన్మిదివ్యవహారములలోనున్న సారసంగ్రహగణితము, మిశ్రవ్యవహారము తెల్గున సువర్ణసూత్ర గణితములుగా విభక్తమగుటచేఁ దొమ్మిది గణితములు గలదయినది.

గుణకారము

మఱియు గుణకార భాగహార వర్గ వర్గమూల ఘన ఘనమూల సంకలిత వ్యుత్కలితంబులని చెప్పనొప్పు నయ్యెనిమిది పరికర్మంబులయందు బ్రథమపరికర్మంబైన గుణకారసూత్రం బెట్టి దనిన, 37

గుణకారము, భాగహారము, వర్గము, వర్గమూలము, ఘనము, ఘనమూలము, సంకలితము, వ్యుత్కలితము అని ఎనిమిది పరికర్మ విశేషాలు.

గమనిక: లోక వ్యవహారంలో పరిక్రియల క్రమం కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగహారం, వర్గం, వర్గమూలం, ఘనం, ఘనమూలం. మల్లన, మూలగ్రంథాన్ని అనుసరించి, మొదట గుణకారం పేర్కొన్నాడు, తరువాత భాగహారం, వర్గ, వర్గమూలాలు, ఘన, ఘనమూలాలు, సంకలితం, వ్యుత్కలితాలను తీసుకొన్నాడు. మల్లన ఈ ప్రకియల క్రమాన్ని మూలవిధేయంగా రాశాడు–

క. వినుతగుణగుణ్యరాసుల
నెనయంగఁ గవాటసంధి నిడి పెంపంగా
ననులోమవిలోమంబులఁ
దనరిన రాశ్యర్థ ఖండ తత్స్థము లయ్యెన్.[1] 38

---

(1) దీనికి వివరణముగా మూలమున లేనివి యీక్రింది గద్య పద్యములు కొన్ని ప్రతులలోనున్నవి.

అందు ప్రథమపరికర్మంబునందుఁ బంచవిధగుణకారం బెట్టి దనిన అనులోమ, విలోమ రాశ్యర్థ ఖండ తత్స్థములని యీపంచవిధాలను గుణించేక్రమం:– గుణకము ఒద్దు మొదట అంకాలు అంకావళిక్రమానం బెట్టి గుణిస్తేను అనులోమము. తుదనుంచి మొదటికి గుణించేది విలోమము. రాశి అర్ధించి గుణకము ద్విగుణించేది రాశ్యర్ధము రాశి ద్విగుణించి గుణకము అర్ధించేది ఖండము. నిడుపు రేఖలు దీర్చి ఒద్దుపెట్టి అడ్డరేఖలలోన గుణకముపెట్టి వహ్నివాయుకోణాదులుగా రేఖలుదీర్చి అయి మూలమార్గమును కూడితే తత్స్థ మగును.

ఈప్రకారాన యెఱుగవలసినది:– రాశ్యర్ధానకు ఉదాహరణ.

గుణింపబడు రాసులను అనులోమ, విలోమ, రాశ్యర్థ, ఖండతత్, సములని ఐదువిధాలుగా గుణించవచ్చు. అనులోమ, విలోమ ప్రక్రియలు కవాటసంధిగా పేర్కొనబడ్డాయి.

క. రాశ్యర్థ గుణితమునకును। రాశియు నర్ధించి గుణకరాశిన్ ద్విగుణం
బాశాసింపుచుఁ బెంచిన। వాసిగ రాశ్యర్థలబ్ధి వచ్చు మహేశా.

క. ధర ఖండ గుణితమును, సం। తరియింపఁగ నౌను ద్విగుణితముగా రాశిన్
సరియించి గుణకమును న। క్కఱ నర్ధముచేసి పెంపఁగా ఖండమగున్

సీ. లెక్కలకొలఁదిని లిఖియింపవలయును నిడుపైనగీటులు నేర్పు మెఱయ
నడ్డపురేఖల నమర నిండులు గీసి వానికి నెంచగా వరుసదీసి
మీఁదిండ్ల నొడ్డుంచి మించి గుణకముతో నొక్కొక్క లెక్కచే నొడ్డు వెంచి
యాలబ్ధ మాయిండ్ల నటువేడ్క నిల్పియు గీటులజాడ లెక్కించి చూచి
తగిలి వరుసను గూడిన తత్స్థ మయ్యెఁ। గాన యీరీతి గుణియింప గణక వరుల
కొడ్డు లబ్ధంబు సమకూడు నొప్పుగాను। గణనరీతులు దెలిసినఁ గ్రమము గాను.
ప్రత్యంతరమున

సీ. ఒడ్డు మొదలనుంచి యొప్పుగా గుణియింప ననులోమ మని దాని నండ్రు బుధులు
ఆయొడ్డు తుద నుంచి యమరంగ గుణిలుంప లోకంబులోన విలోమ మయ్యె
ఆయొడ్డు నైదింట నమరంగ గుణియింప నర్ధించి కలప రాశ్యర్ధ మయ్యె
(గుణకంబురెట్టించి గుణముగానాయొడ్డు నర్ధించి పెంపరాశ్యర్ధమయ్యె)
ఒకదిక్కు ఖండించి యొడ్డీవలావల ఘనతతో గుణియింప ఖండమయ్యె
గాన యీరీతి గుణియింప గణకవరుల। కదియు నొడ్డున లబ్ధమై యమరు ననియె
పరగఁగొచ్చెర్లకోట గోపననుతుండు। రతుఁడు నారాయణప్రభురాజమౌళి.

పరిభాషలు తెలిసేక్రమము

వ. యుతమును యోగమును గదియుటయును గలుపుటయును చేర్చుటయును గూడుటయును నీయాఱును కూడేటందుకు నేకశబ్దము. అంతరించుట ఉరవుట గుదియుట తివియుట వియుతిగొనుట పుచ్చుమనుట యీయాఱున్ను రాశిలెక్కలలో తీసివేసేటందుకు నేక శబ్దము. దళమును నర్ధమును సగమును విలసితమును భాగమును నివియైదును సగము చేసేటందుకు నేకశబ్దము. పెంచుటయు గుణించుటయు హెచ్చుమనుటయు హతముసేయుటయు నీనాలుగును గుణకారానకు నేకశబ్దము. ఎత్తుమనుటయు భజింతమనుటయు పాలుగొనుటయు భాగహారమనుటయు నీ నాలుగున్ను భాగహారానకు నేకశబ్దము. కృతియును వర్గువనుటయు ప్రతి సమప్రతి పెంపుటయు నీమూడును వర్గ్గవున కేకశబ్దము. పదమును మూలమును కృతిమూలమును వర్గుమూలమును నీనాలుగున్ను వర్గుమూలమునకు నేకశబ్దము.

క. సున్నయు సున్నయుఁ బెంచిన
సున్నయ; తత్కృతి ఘనంబు సున్నయ వచ్చున్
సున్నయు లెక్కయుఁ బెంచిన
సున్నయ తా నమరియుండు సుస్థిరరీతిన్. 39

$0\times0=0,\ 0^2=0,\ 0^3=0,\ 0\times$శూన్యేతరసంఖ్య$=0$

గమనిక: మూలంలో ప్రస్తావింపబడిన అంశము, సున్నచే భాగహారం మల్లన తన రచనలో చేర్చలేదు –

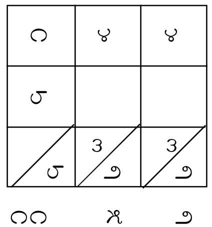
క. [1]మేలుగ నెనిమిది యొక్క శి
వాలయమున కంబుజంబు లర్పించినచో

---

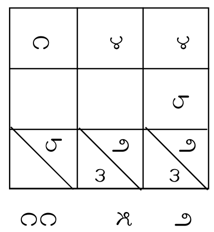
(1) ఈ యొడ్డునైదువిధాల గుణించే క్రమం.

ఒడ్డు ౧౪౪ గుణకం ౮, లబ్ధం ౧౧౫౨

విలోమక్రమము



అనులోమక్రమము



ప్రకారాంతరము

విలోమక్రమము

	౧	౪	౪
	౮		
౮×౧	౮		
౮×౪	౩	౨	
౮×౪		౩	౨
	౧౧	౫	౨

అనులోమక్రమము

	౧	౪	౪
			౮
౮×౪		౩	౨
౮×౪	౩	౨	
౮×౧	౮		
	౧౧	౫	౨

నీ లెక్క నూటనలువది
నాలుగు భవనముల కెన్ని నలినములయ్యెన్ ॥ **40**

రాశ్యర్ధము :

ఒడ్డు ౧౪౪ కి అర్ధము ౭౨, గుణకద్విగుణము ౧౬, లబ్ధము ౧౧౫౨

```
౧౪౪ }       ౭౨
  ౮ }       ౧౬
          -----
           ౪౩౨
           ౭౨
          -----
          ౧౧౫౨
```

ఖండము :

ఒడ్డు ౧౪౪ కి అర్ధము ౨౮౮, గుణకము అర్ధము ౪, లబ్ధము ౧౧౫౨

```
౧౪౪ }       ౨౮౮
  ౮ }         ౪
          -----
          ౧౧౫౨
```

[1]తత్స్థము :

ఒడ్డు ౧౪౪, గుణకము ౮, లబ్ధము ౧౧౫౨

```
 ౨౮౮
   ౪
-----
౧౧౫౨
```

1) అనులోమ విలోమములు రెండు దెఱఁగులును ఒకతీరు విభాగములు; రాశ్యర్ధఖండ తత్స్థములు మూఁడును వేఱుతీరుల విభాగములు. కాఁగా రాశ్యర్ధ ఖండ తత్స్థములు మూఁడును అనులోమ విలోమరీతులచే నాఱురీతు లగును. పూర్వపు వ్రాఁతలలో గుణకార మైదు దెఱఁగులనుట స్థూలరీతి ననుట.

ఒక్కొక్క శివాలయానికి 8 తామర పూవులు సమర్పిస్తే, మొత్తం 144 శివభవనాలకు ఎన్ని పూవులు అర్పించాలి?

ఒడ్డు (multiplicand) 144, గుణకులు (multiplier) 8 లబ్ధము (product) =1152. 144×8=1152

క. [1]నవసంఖ్యమానికము లొక
శివలింగముపూజ కైనఁ జెప్పుము సామో
ద్భవవసులోచనసంఖ్యకుఁ
బ్రవిమలమగు మణులసంఖ్య భావించితగన్. **41**

గుణకం ౯, ఒడ్డు ౨౮౮, లబ్ధం ౨౫౯౨.

ఒక శివలింగ పూజకు 9 మణులవసరము సామోద్భవ (8), వసు (8), లోచన (2) సంఖ్య అంటే 288 శివలింగాల పూజకు ఎన్నిమణులు కావాలి?

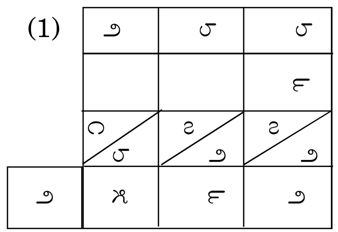
ఒడ్డు 288, గుణకం 9, లబ్ధం 2592

288×9=2592

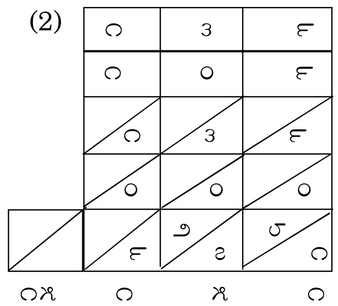
క. [2]ముదముతోడ నూటముప్పదితొమ్మిది
మణులు శూలి కొక్కమందిరమున
నలరఁ బూజయైన నటు నూటతొమ్మిది
మందిరముల కెన్నిమణులు వలయు. **42**

గుణకం ౧౦౯, ఒడ్డు ౧౩౯, లబ్ధం ౧౫౧౫౧.

(1)



(2)



ఒక శివమందిరమునకు 139 మణులు అయితే 109 మందిరముల కెన్ని మణులు అవసరం?

ఒడ్డు 139, గుణకం 109, లబ్ధం 15151

139×109=15151

క. [1]ఒక్కొక్క శివాలయమున
కెక్కించిన పద్మసంఖ్య యిరువదియే డీ
లెక్క వసునిధినవేందుల
కెక్కించిన పద్మసంఖ్య యేర్పడc జెపుమా. 43

గుణకం ౨౭, ఒడ్డు ౧౯౯౮, లబ్ధం ౫౩౯౪౬.

ఒక శివాలయానికి 27 పద్మములు. వసు (8), నిధి (9), నవ (9) ఇందు (1) అంటే 1998 శివాలయాలకు ఎన్ని పద్మాలు?

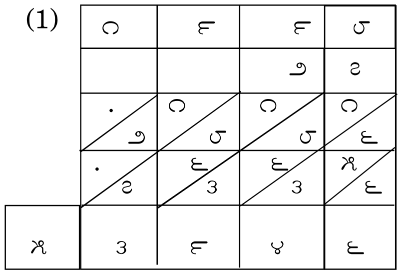
ఒడ్డు 1998, గుణకం 27, లబ్ధం 53946

1998×27=53946

క. హిమకరవసురసగతినిధి
కమలాననశై లనేత్రగణ మేర్పడ నీ
క్రమమున నిడి శశిగతివే
దములం బెంచిన ఫలంబు దా నెంతయగున్. 44

గుణకం ౪౪౧, ఒడ్డు ౨౭౯౯౪౬౮౧, లబ్ధం ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧.

---

(1)


హిమకర (1), వసు (8), రస (6), గతి (4), నిధి (9), కమలానన (9), శైల (7), నేత్ర (2), సంఖ్య (ఒడ్డు)= 27994681.

శశి (1), గతి (4), వేద (4) : సంఖ్య (గుణకం)= 441

27994681×441= 12345654321

క. సోమాంబుధివేదసుధా
ధామాగ్నిశరంబు లిడి ముదంబున శశభృ
త్సామజసంఖ్యను బెంచిన
నేమియగున్ దానిసంఖ్య నెఱిcగింపు మిలన్. 45

గుణకం ౮౧, ఒడ్డు ౫౩౧౪౪౧, లబ్ధం ౪౩౦౪౬౭౨౧.

సోమ-1, అంబుధి-4, వేద-4, సుధాధారం-1, అగ్ని-3, శరంబు-5, సంఖ్య 531441. (ఒడ్డు) శశిభృత్-1, సామ-8 : సంఖ్య 81 (గుణకం) లబ్ధం=531441×81=43046721.

క. రామగజరసనగేంద్రియ
సోముల నిడి నిధులc బెంచి స్రుక్కcగc దత్సం
ఖ్యామాన మెఱుcగc జెప్పుము
శ్రీమద్గుణనిలయ! గణకశేఖర! మాకున్. 46

గుణకం ౯, ఒడ్డు ౧౫౭౬౮౩, లబ్ధం ౧౪౧౯౧౪౭.

రామ-3, గజ-8, రస-6, నగ-7, ఇంద్రియ-5, సోమ-1 : సంఖ్య: 157683 (ఒడ్డు) నిధి-9, గుణకం.

లబ్ధం=157683×9=1419147

క. ఎనిమిది దక్కcగc దక్కిన
యెనిమిది లెక్కలను వరుస నిడి నవగుణమై

[1]చనఁగాఁ దద్విగుణాదుల
నెనయం గలఫలము లెల్ల నెఱిఁగింపు మిలన్. 47

గుణకం ౯, **ఒద్దు** ౧౨౩౪౫౬౭౯, **లబ్ధం** ౧౧౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯౯౯ ।

8ని మినహాయించి మిగిలిన అంకెలతో లభించే సంఖ్య 12345679. దీనిని 9తో గుణిస్తే వచ్చేలబ్ధం : 12345679×9=111111111. వాటిని ద్విగుణాదిగా, అంటే 2తో, 3తో, 4తో, 5తో....9తో గుణిస్తూపోతే వచ్చే లబ్ధాలు.

111111111×2=222222222

111111111×3=333333333

111111111×4=444444444

111111111×5=555555555

111111111×6=666666666

111111111×7=777777777

111111111×8=888888888

111111111×9=999999999

క. **ఏడును నేనాఱ్లును గడు**
వేడుకతో నాఱుమూళ్లు వెలయఁగ నిడి తా
రూడిగ ముప్పదిమూఁటను
దోడనె గుణియించి చెప్పు ధ్రువముగ మాకున్. 48

గుణకం ౩౩, **ఒద్దు** ౭౬౬౬౬౬౩౩౩౩౩౩, **లబ్ధం** ౨౫౨౯౯౯౮౮౯౯౯౮౯.

1) చనుఫలములు ద్విగుణాదుల
నెనయఁగఁ బెంచినఫలంబు వేర్పఱుపు మిలన్.

7ప్రక్క ఐదు ఆర్లను, ఆరు మూళ్ళను ఉంచి దానిని 33తో గుణించాలి. ఒద్దు=766666333333, గుణకం=33

లబ్ధం=766666333333×33=25299988999889

"అంకానాం వామతో గతి" – ననుసరిస్తే :

ఒద్దు=333333666667, గుణకం=33

లబ్ధం=11000011000011

క. **రామగతిచంద్రభూభృత్**
సామజకరవార్ధిధరణిసంఖ్యఁ దురంగ
స్తోమమునఁ బెంచి తత్ఫల
మేమి యగునొ యెఱుఁగఁజెప్పుమీ గణకవరా! 49

రామ–3, గతి–4, చంద్ర–1, భూభృత్–7, సామజ–8, కర–2, వార్ధి–4, ధరణి–1: సంఖ్య=14287143 (ఒద్దు) తురంగస్తోమము–7, గుణకం.

లబ్ధం=14287143×7=100010001

పాఠాంతరము

క. **పురగతిశశధరధరణీ**
ధరవసులోచనపయోధిధరణుల నిడి త
ద్గిరిసంఖ్య నొనరఁ బెంచినఁ
బరువడిఁ దద్గుణితరాశిఫల మెంతయగున్. 50

గుణకం ౮, **ఒద్దు** ౧౪౨౮౭౧౪౩, **లబ్ధం** ౧౦౦౦౧౦౦౦౧.

పుర–3, గతి–4, శశధర–1, ధరణీధర–7, వసు–8, లోచన–2, పయోధి–4, ధరణి–1. కాబట్టి సంఖ్య–14287143. (ఒద్దు)గిరి–7= గుణకము.

లబ్ధము= 14287143×7=100010001

క. **గుణగతిశశిగిరిశరవా**
రణనేత్రపయోధిశీతరశ్ములు గిరులన్
గుణితంబు చేసి చెప్పుము
మణివిరచితశూలికంఠమాలిక వచ్చున్. **51**

గుణకం ౭, **ఒడ్డు** ౧౪౨౮౫౭౧౪౩, **లబ్ధం** ౧౦౦౦౦౦౦౦౦౧.

గుణ-3, గతి-4, శశి-1, గిరి-7, శర-5, వారణ-8, నేత్ర-2, పయోధి-4, శరరశ్మి-1.

కాబట్టి సంఖ్య=142857143 - ఒడ్డు గిరులన్-7=గుణకం

లబ్ధము=142857143×7=1000000001 ఈ సంఖ్య మణివిరచిత శివకంఠమాలిక అట!

క. **గిరిపురగగనాశ్వములున్**
హరనయనాంబరనగాగ్ను లమరగ నిడియున్
వరుసన్ రాములఁ బెంచినఁ
బరువడి లబ్ధంబు మాకు బాగుగఁ జెపుమా. **52**

గిరి-7, పుర-3, గగన-0, అశ్వ-7, హరనయన-3, అంబర-0, నగ-7, అగ్ని-3 కాబట్టి సంఖ్య=37037037. రాములు-3, గుణకం.

లబ్ధము=37037037×3=111111111

పాఠాంతరము

క. **ఏడు మూఁడు సున్న యేడు మూఁడును సున్న**
యేడు మూఁడు లెక్క లెసగ నిల్పి
మూఁటితోడఁ బెంచి ముదమున లెక్కించి
గుణకఫలము చెప్పు గణకతిలక! **53**

గుణకం ౩, **ఒడ్డు** ౩౭౦౩౭౦౩౭, **లబ్ధం** ౧౧౧౧౧౧౧౧౧.

ఒడ్డు=37037037, గుణకం-3

లబ్ధం=37037037×3=111111111

క. **తురగాంబరాక్షిలోచన**
శరచంద్రుల రామశైల సద్గుణితముగాఁ
బరగినఫల మది మతియును
[1]**నరయఁగఁ దద్ద్విగుణితాదిహతు లెన్నియగున్.** **54**

గుణకం ౭౩, **ఒడ్డు** ౧౫౨౨౦౭, **లబ్ధం** ౧౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯౯ ।

తురగ-7, అంబర-0, అక్షి-2, లోచన-2, శర-5, చంద్ర-1 : సంఖ్య=152207-ఒడ్డు. గుణకం: రామ-3, శైల-7 అంటే 73

లబ్ధము=152207×73=11111111

11111111×2=22222222

11111111×3=33333333

11111111×4=44444444

11111111×5=55555555

11111111×6=66666666

11111111×7=77777777

11111111×8=88888888

11111111×9=99999999

గీ. **గతిపయోధిచంద్రకరరసబాహుల**
వరుసతోడ నిడి ధ్రువమ్ము గాఁగ

---

1) నరయఁగఁ దద్ద్విగుణఫలము నది యెంతయగున్.

వనధితర్కసంఖ్య నొనరంగఁ బెంచిన

ఫలముఁ జెప్పు గణకతిలక! మాకు. 55

గుణకం ౬౪, ఒద్దు ౨౬౨౧౪౪, లబ్ధం ౧౬౭౭౭౨౧౬.

గతి–4, పయోధి–4, చంద్ర–1, కర–2, రస–6, బాహు–2, కాబట్టి సంఖ్య=262144. గుణకం: వనధి–4, తర్క–6, –64

లబ్ధం= 262144×64=16777216

క. రుద్రాంబర రుద్రాంబర

రుద్రుల వరుస నిడి శీతరుచిరంధ్రములన్

దద్రాశిఁ బెంచి చెప్పుము

రుద్రార్చితపుష్పతిలక ! రూపేర్పడఁగన్.[1] 56

గుణకం ౯౧, ఒద్దు ౧౧౦౧౧౦౧౧, లబ్ధం ౧౦౦౨౦౦౨౦౦౧.

రుద్ర–11, అంబర–0, రుద్ర–11, అంబర–0, రుద్రాలు–11 సంఖ్య=11011011–ఒద్దు.

శతరుచి–1, రంధ్రము–9, గనక గుణకం=91

లబ్ధము=11011011×91=1002002001 దత్తసంఖ్య (గుణ్యం) ఒక కంఠాభరణసంఖ్య. ఇది లబ్ధము= రాజకంఠాభరణ సంఖ్య అంటాడు మహావీరుడు.

క. అరయ రత్నములు సమర్పించె నొక్కొక

గుడికిఁ బదునొకండు గుణముగాఁగ

రుద్రసంఖ్యవలయు రుద్రాలయము లెన్ని

మణులు వచ్చు నెఱుఁగ మాకుఁ జెపుమ. 57

గుణకం ౧౧, ఒద్దు ౧౧, లబ్ధం ౧౨౧.

1) ఇంతవఱకే సంస్కృత మూలశ్లోకములున్నవి. ఇటుపైఁగల పద్యములు అన్నియునేని కొన్నియేని పావులూరి మల్లన రచితములుగాక ప్రక్షిప్తములు కాఁగూడును.

రుద్రసంఖ్య 11, అన్ని రుద్రాలయములున్నాయి. ఒకొక్క రుద్రాలయమునకం 11 మణులు అవసరము. మొత్తం కావలసినమణులు ఎన్ని? 11×11=121

ఒద్దు 11, గుణకం 11, లబ్ధం=121

ఇక్కడ గుణ్యం, గుణకం, లబ్ధం అన్నీ ద్విముఖచే "ద్విముఖసంఖ్యల పసికూనలు"–

క. గిరిగగనచంద్రజలధులఁ

బరువడి నిడి మూఁటఁ బెంపఁ బరగిన ఫలముల్

సొరిది గుణియించి చెప్పుము

పరమేశపదాబ్జభృంగ! పరమశుభాంగా! 58

గుణకం ౩, ఒద్దు ౪౧౦౭, లబ్ధం ౧౨౩౨౧.

గిరి–7, గగన–0, చంద్ర–1, జలధి–4, కాబట్టి సంఖ్య 4107–ఒద్దు గుణకం: 3; లబ్ధం= 4107×3=12321 ఇది ద్విముఖ ప్రతిబింబసంఖ్య.

క. పూని శివారాధన మొక

పూనికకున్ దొంబదాఱుపుష్పంబులుగా

నేనూర్పన్నెద్దుగ్గళ్లకు

మానుగఁ పుష్పంబు లెన్ని మంత్రివరేణ్యా! 59

గుణకం ౯౬, ఒద్దు ౫౧౨, లబ్ధం ౪౯౧౫౨.

ఒక శివారాధనకు 96 పూలు; 512 శివాలయాలకు ఎన్నిపూలు? ఒద్దు=512, గుణకం=96

లబ్ధం=512×96=49152

క. రాజాబ్ధిఖేందుగిరినవ

రాజీవభవాష్టమౌనిరతిపతిబాణ

క్ష్మాజలధికరశరద్విజ

రాజుల శశికరులఁ బెంచి క్రమమునఁ జెపుమా. 60

గుణకం ౮౧, **ఒడ్డు** ౧౫౨౪౧౫౭౮౯౯౭౧౦౪౧, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౭౮౯౮౭౬౫౪౩౨౧.

రాజ–1, అబ్ధి–4, ఖ–0, ఇందు–1, గిరి–7, నవ–9, రాజీవభవ–9, అష్ట–8, మౌని–7, రతిపతిబాణ–5, క్ష్మా–1, జలధి–4, కర–2, శర–5, ద్విజరాజ–1. కాబట్టి సంఖ్య=152415789971041, ఒడ్డు గుణకం: శశి–1, కరుల–8 – అంటే 81తో గుణిస్తే

లబ్ధం= 152415789971041×81=12345678987654321

క. **నగగతిగజరామేంద్రియ**

గగనరససముద్రచంద్రగణ మొప్ప భువిన్

దగ నిడి భుజగగతిశ్రుతు

ల గుణించి వచింపుమా ఫలము బుధు లెన్నన్. 61

గుణకం ౦౪౪౮, **ఒడ్డు** ౧౪౬౦౫౩౮౪౭, **లబ్ధం** ౬౫౪౩౨౧౨౩౪౫౬.

నగ–7, గతి–4, గజ–8, రామ–3, ఇంద్రియ–5, గగన–0, రస–6, సముద్ర–4, చంద్ర–1 గుణమును అంటే సంఖ్య 146053847 ను గుణకం, భుజగ–8, గతి–4, శ్రుతులు–4తో అంటే 448తో గుణిస్తే లబ్ధం?

లబ్ధం=65432123456–ఇదో చమత్కారము.

క. **ఇమ్ముగను నేకమాదిగఁ**

దొమ్మిది లెక్కలను వరుసతో నిడి వేగన్

సమ్మతితో నిధులను జే

తమ్మున గుణియించి చెప్పు తప్పక ఫలమున్. 62

గుణకం ౯, **ఒడ్డు** ౧౨౩౪౫౬౭౮౯, **లబ్ధం** ౧౧౧౧౧౧౧౧౧౦౧.

ఒకటిమొదలు అన్ని సంఖ్యలను వరుసగా రాసి, ఒడ్డుగా తీసికొని, నిధులు అంటే 9ని గుణకంగా, హెచిస్తే వచ్చేలబ్ధం? 123456789×9= 1111111101.

క. **రామాంబరనిధిసాగర**

నామాఋతుగుణరసంబు నగచంద్రులతోఁ,

బ్రేమమున గిరులఁ బెంచియు

సామర్థ్యముతోడఁ జెప్పు చయ్యన ఫలమున్. 63

గుణకం ౭, **ఒడ్డు** ౧౭౬౩౬౬౪౯౦౩, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧.

రామ–3, అంబర–0, నిధి–9, సాగర–4, నామ–6, ఋతు–6, గుణ–3, రస–6, నగ–7, చంద్ర–1 అయితే సంఖ్య=1763664903–ఒడ్డు గుణకం: గిరులు–7,

లబ్ధం= 1763664903×7=12345654321

క. **సరసిజభవరసగుణనిధి**

పురతురగనిశాకరాద్రిపురశశిసంఖ్యం

గరమర్థిఁ దొమ్మిదింటను

నిరవుగ గుణియించి చెప్పు మేర్పడ మాకున్. 64

గుణకం ౯, **ఒడ్డు** ౧౩౭౧౭౩౯౩౯౯, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧.

సరసిజభవ–9, రస–9, గుణ–3, నిధి–9, పుర–3, తురగ–7, నిశాకర–1, అద్రి–7, పుర–3, శశి–1, సంఖ్య= 1371739399–ఒడ్డు. గుణకం–9

లబ్ధం=1371739399×9=12345654321

("లేఖన సామగ్రి పరిమితంగా ఉన్న రోజుల్లో మల్లన ఇంతపెద్ద సంఖ్యను ఉత్పన్నం చెయ్యడం నిజంగా ఆశ్చర్యకరం. మహావీరునితో పోటీపడి ఆయన

చెప్పిన 24 స్థానాలకు బదులు 36 స్థానాలు వట్టిగనే కల్పించలేదని మల్లన ఈ సమస్యతో నిరూపించుకున్నాడు. మహావీరుడు ప్రదర్శించిన అన్ని లబ్ధసంఖ్యలను మించిన చమత్కారం, ప్రౌఢి, వినోదం, ఈ సంఖ్యలో విదితమౌతాయి. ఇంత రాకాసి సంఖ్య కూడా జంట జంటలుగా పెరుగుతూ తరుగుతూ ఉన్న కడలితరగలా ప్రసరించి ద్విముఖ ప్రతిబింబ, సౌష్ఠవాది సమస్త లక్షణాలతో కూడినది కావటం. దీనికి భాజ్యతా సూత్రాలవల్ల 9 కారణరాశి అని గ్రహించి భాగహారంవల్ల పై గుణ్యసంఖ్యను సాధించి ఉంటాడు. ఈ సంఖ్య ప్రకరణానికే ఒక దీపస్తంభం" – మనోరంజనీవ్యాఖ్య. పు.36)

గీ. **ఆఱు నొక్కట్ల నొద్దుగా నమరఁ బెట్టి**
యంతగుణకంబుచేతను నమరఁ బెంచి
సొరిది వర్గించి జనులకుఁ జోద్యముగను
హిమకరోపమ లబ్ధంబు నెనయవచ్చు. 65

గుణకం ౧౧౧౧౧౧, **ఒడ్డు** ౧౧౧౧౧౧, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧.

ఒడ్డు ఆరు ఒకట్లు అంటే 111111 అదే సంఖ్య గుణకంగా తీసికొని హెచ్చిస్తే వచ్చే లబ్ధం= 111111×111111=12345654321.

సీ. **రత్నశైలశరాగ్ని రవిపథగిరినేత్ర**
గజబాహుపర్వతాకాశయుగము
నామసామజనిధివ్యోమరుద్రకరాగ్ని
శరతురగాంబరజలధివసువు
లక్షిదిగ్దంతిరామాంబరపర్వత
జలధిచక్షుస్సోమచయము నిల్పి
రత్న సంఖ్యను బెంచి ప్రౌఢకుఁ డనఁగను
నుగ్గడింపవలయు నొప్పుగాను

తే. **మొదల ననులోమము విలోమము తుదనుండి**
పెంచి భాగించి పెద్దలప్రియము గూర్చి

భళిభళీ యనిపొగడంగఁ బరగునతఁడు
చతురుఁడగువాఁడు సర్వజ్ఞచక్రవర్తి. 66

గుణకం ౯, **ఒడ్డు** ౧౨౪౭౦౩౮౨౮౪౦౭౫౩౨౧౧౦౯౮౬౪౦౭౨౮౨౭౦౩౫౭౯, **లబ్ధం** ౧౧౨౨౩౩౪౪౫౫౬౬౭౭౮౮౯౯౮౮౭౭౬౬౫౫౪౪౩౩౨౨౧౧.

రత్న–9, శైల–7, శర–5, అగ్ని–3, రవిపథం–0, గిరి–7, నేత్ర–2, గజ–3, బాహు–2, పర్వత–7, ఆకాశ–0, యుగము–4, నామ–6, సామజ–8, నిధి–9, వ్యోమ–0, రుద్ర–11, కర–2, అగ్ని–3, శర–5, తురగ–7, అంబరు–0, జలధి–4, వసువు–8, అక్షి–2, దిగ్దంతి–8, రామ–3, అంబరం–0, పర్వత–7, జలధి–4, చక్షు–2, సోమ–1.

ఈ సంఖ్య=124703828407532110986407282703579. ఒడ్డు గుణకం: రత్నసంఖ్య అంటే 9.

లబ్ధం=124703828407532110986407282703579×9= 1122334455667788998877665544332211.

ఆ. **శైలగగనచంద్రసామజసోములఁ**
గరశరేందుశశులుగతులు నిల్పి
యగ్ని సంఖ్యఁ బెంచి యమరంగఁ జెప్పుము
గణకతిలక మాకుఁ గ్రమముతోడ. 67

గుణకం ౩, **ఒడ్డు** ౪౧౧౫౨౧౮౧౦౭, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧.

శైల–7, గగన–0, చంద్ర–1, సామజ–8, సోమ–1, కర–2, శర–5, ఇందు–1, శశి–1, గతి–4, కాబట్టి సంఖ్య=4115218107–ఒడ్డును అగ్ని సంఖ్య, అంటే 3తో గుణిస్తే

లబ్ధం=4115218107×3=12345654321.

క. నవరసగుణనిధిరాముల
నవిరళముగ శైలహిమకరాశ్వాగ్నులఁ దాఁ
గువలయహితులను నిడియును
బ్రవిమలరత్నములఁ బెంప ఫలమెంతయగున్. 68

గుణకం ౯, **ఒడ్డు** ౧౩౭౧౭౩౯౩౬౯, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧.

నవ–9, రస–6, గుణ–3, నిధి–9, రామ–3, శైల–7, హిమకర–1, అశ్వ–7, అగ్ని–3, కువలయహిత 1, కాబట్టి సంఖ్య= 1371739369–ఒడ్డు గుణకం: రత్నములు 9:

లబ్ధం=1371739369×9=12345654321

క. రామాగ్ని వహ్నిరసఋతు
నామభువనభువనములగుణములను నిడి తా
నామునిగుణములఁ బెంచిన
సామర్థ్యముతోడ ఫలము చయ్యన చెపుమా. 69

గుణకం ౩౭, **ఒడ్డు** ౩౩౩౬౬౬౩౩౩, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧.

రామ–3, అగ్ని–3, వహ్ని–3, రస–6, ఋతు–6, నామ–6, భువన–3, భువన–3, గుణము–3 కాబట్టి సంఖ్య=333666333 ఒడ్డు గుణకం: ముని–7, గుణముల–3 అంటే 37

లబ్ధం=333666333×37=12345654321.

క. సోమాంబరనేత్రాంబర
రామాంబరవేదగగనరామాంబరముల్
ప్రేమఁ గరగగనచంద్రుల
సోమకరేందుల గుణించి సూటిగఁ జెపుమా. 70

గుణకం ౧౨౧, **ఒడ్డు** ౧౦౨౦౩౦౪౦౩౦౨౦౧, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౭౮౭౬౫౪౩౨౧.

సోమ–1, అంబరం–0, నేత్ర–2, అంబర–0, రామ–3, అంబర–0, వేద–4, గగన–0, రామ–3, అంబర–0, కర–2, గగన–0, చంద్ర–1. కాబట్టి సంఖ్య= 1020304030201–ఒడ్డు గుణకం: సోమ–1, కర–2, ఇందు–1 అంటే 121

లబ్ధం=1020304030201×121=1234567876543 21.

ఆ. శశికరాబ్ధిశై లచంద్రహయాగ్నీందు
గగనదివనిధానకర్మరామ
నవగుణాద్రిరంధ్రదివభూమిమితరాశి
గ్రహగుణంబు సేయు గణక తిలక. 71

గుణకం ౯, **ఒడ్డు** ౧౦౯౭౩౯౩౬౯౦౦౧౩౭౧౭౪౨౧, **లబ్ధం** ౯౮౭౬౫౪౩౨౧౦౧౨౩౪౫౬౭౮౯

ఇక్కడ గుణకం ద్విముఖవర్గసంఖ్య, ఒడ్డు ద్విముఖ సౌష్ఠవసంఖ్య– లబ్ధము అంటే శశి–1, కర–2, అబ్ధి–4, శైల–7, చంద్ర–1, హయ–7, అగ్ని–3, ఇందు–1, గగన–0, దివ–0, నిధాన–9, కర్మ–6, రామ–3, నవ–9, గుణ–3, అద్రి–7, రంధ్ర–9, దివ–0, భూమి–1. కాబట్టి సంఖ్య 10973936 90013717421 ఒడ్డు గుణకము. గ్రహ–9.

లబ్ధం=1097393690013717421×9=9876543210123456789 మల్లన, "అవరోహణ, ఆరోహణల్లో పది అంకెల రైలుబండి నడిపించాడు – అపురూపమైన సమస్య"

క. తురగహయమునులు పృథ్వీ
పరువతనిధ్యంబరాగ్ని భద్వయచంద్రుల్
గిరినయనము లిడి మునివసు
కరసంఖ్య గుణింప నెంత గణితవిచారా. 72

గుణకం ౨౮౭, ఒడ్డు ౨౭౧౦౦౩౦౯౭౧౭౭౭, లబ్ధం ౭౭౭౭౭౮౮౮౮౮౯౯౯౯౯.

తురగ–7, హయ–7, మునులు–7, పృథ్వీ–1, పరువత–7, నిధి–9, అంబర–0, అగ్ని–3, భద్వయ–0, 0, చంద్ర–1, గిరి–7, నయనము–2.

కాబట్టి సంఖ్య= 2710030971777– ఒడ్డు. గుణకం: ముని–7, వసు–8, కర–2 అంటే 287.

లబ్ధం= 2710030971777×287=777778888899999. “గుణక గుణ్యాల్లో ఏ కోశాన కనిపించని విచిత్ర సౌందర్యంగల 5 అంకెల సంఖ్య”

చ. సరసిజగర్భరంధ్రనవసప్తతురంగమునీంద్రసంఖ్యలున్
వరరసషట్కతర్కగజవారణసింధురపంచ బాణముల్
శరహుతభుక్శశాంకధరచక్షువులున్ గుణబాహులొడ్డుగా
సరిగొని చంద్రరంధ్రనవసంఖ్యలతో గుణియించి చెప్పుమా. 73

గుణకం ౯౯౧, ఒడ్డు ౨౩౩౩౫౫౫౮౮౮౬౬౬౭౭౭౯౯౯౯, లబ్ధం ౨౩౧౨౫౫౩౮౮౫౬౬౮౭౭౬౯౯౭౦౦౯.

సరసిజగర్భ–9, రంధ్ర–9, నవ–9, సప్త–7, తురంగ–7, మునీంద్ర–7, రస–6, షట్క–6, తర్క–6, గజ–8, వారణ–8, సింధుర–8, పంచ–5, బాణ–5, శర–5, హుతభుక్–3, శశాంకధర చక్షువులు–3, గుణ–3, బాహు–2. కాబట్టి సంఖ్య= 23335558886667779999– ఒడ్డు గుణకం: చంద్ర–1, రంధ్ర–9, నవ–9 అంటే 991.

లబ్ధం= 23335558886667779999×991=2312553885668776997009.

క. గిరిరాములఁ బరిమితముగ
నరయగ గుణములను బెంచినట్టి ఫలంబున్

గరిమను దద్విగుణాదులఁ
బరువడి గుణియింప వానిఫలమున్ జెపుమా. 74

గిరి–7, రాములు–3, ఏర్పడే సంఖ్య 37 ఈ సంఖ్యను అంటే ఒడ్డును గుణములతో గుణించి వరుసగా రెట్టింపు మూడురెట్లు, నాలుగురెట్లు, ఐదురెట్లు, ఆరురెట్లు, ఏడురెట్లు, ఎనిమిదిరెట్లు, తొమ్మిదిరెట్లు చేస్తూపోతే లభించే లబ్ధాలు: అంటే 37ను వరుసగా 3,6,9,12,15,18,21,24,27 గుణిస్తే లభించే లబ్ధాలు

37×3=111
37×6=222
37×9=333
37×12=444
37×15=555
37×18=666
37×21=777
37×24=888
37×27=999

పాఠాంతరము

క. శైలగుణసంఖ్యఁ బురముం
దేలం గుణితంబుసేసి తెలుపుము మాకున్
మేలుగఁ దద్విగుణాదుల
నోలిన్ బెంచిన ఫలంబు లొగి నెన్నియగున్. 75

గుణకం ౩ । ౬ । ౯ । ౧౨ । ౧౫ । ౧౮ । ౨౧ । ౨౪ । ౨౭, **ఒడ్డు** ౩౭, **లబ్ధం** ౧౧౧ । ౨౨౨ । ౩౩౩ । ౪౪౪ । ౫౫౫ । ౬౬౬ । ౭౭౭ । ౮౮౮ । ౯౯౯.

శైల–7, గుణ–3 కాబట్టి సంఖ్య=37 ఒడ్డు దీనిని పురము–3తో తద్ద్విగుణాదులతో–అంటే 3 తరువాత, 6తో, 9తో, 12తో, 15తో.... 27తో గుణిస్తే, ఏర్పడే లబ్ధాలు వరుసగా.

37×3=111
37×6=222
37×9=333
37×12=444
37×15=555
37×18=666
37×21=777
37×24=888
37×27=999

క. **అమరఁగ సోమాంబరశశిఁ**
గొమరుగ రుద్రులను బెంచికొన నగు ఫలముల్
క్రమమునఁ దద్ద్విగుణాదుల
నమరగఁ బెంచిన ఫలంబు లవి యెన్ని యగున్. **76**

గుణకం ౧౧ । ౨౨ । ౩౩ । ౪౪ । ౫౫ । ౬౬ । ౭౭ । ౮౮ । ౯౯, **ఒడ్డు** ౧౦౧, **లబ్ధం** ౧౧౧౧ । ౨౨౨౨ । ౩౩౩౩ । ౪౪౪౪ । ౫౫౫౫ । ౬౬౬౬ । ౭౭౭౭ । ౮౮౮౮ । ౯౯౯౯.

సోమ–1, అంబర–0, శశి–1 అంటే సంఖ్య=101 ఒడ్డును రుద్రులు=11తో ద్విగుణాదులుగా రూపొందిస్తే లభించే లబ్ధం:

101×11=1111
101×22=2222
101×33=3333

101×44=4444
101×55=5555
101×66=6666
101×77=7777
101×88=8888
101×99=9999

క. **వెలయఁగ శశిగిరిబాహుల**
నలువదియొక్కంటఁ బెంచినట్టి ఫలంబుల్
పొలుపుగఁ దద్ద్విగుణాదుల
నలయక పెంచిన ఫలంబు లవి యెన్ని యగున్. **77**

గుణకం ౪౧ । ౮౨ । ౧౨౩ । ౧౬౪ । ౨౦౫ । ౨౪౬ । ౨౮౭ । ౩౨౮ । ౩౬౯, **ఒడ్డు** ౨౭౧, **లబ్ధాలు** ౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯.

శశి–1, గిరి–7, బాహు–2, సంఖ్య 271 – ఒడ్డు మొదట 41 గుణకంగా, తరువాత ద్విగుణాదులను గుణకాలుగా తీసుకొని గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాలు:

271×41=11111
271×82=22222
271×123=33333
271×164=44444
271×205=55555
271×246=66666
271×287=77777
271×328=88888
271×369=99999.

క. పురనగవసుశరచంద్రుల
గిరులం బెంచిన ఫలంబు కీర్తితముగఁ ద
ద్గిరిసంఖ్యాద్విగుణాదుల
నరుదుగఁ బెంచిన ఫలంబు లవి యెన్నియగున్. **78**

గుణకం ౭ । ౧౪ । ౨౧ । ౨౮ । ౩౫ । ౪౨ । ౪౯ । ౫౬ । ౬౩, **ఒడ్డు** ౧౫౮౭౩, **లబ్ధాలు** ౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯.

పుర–3, నగ–7, వసు–8, శర–5, చంద్ర–1 కాబట్టి సంఖ్య 15873– ఒడ్డు గుణకం: గిరి–7, దీని ద్విగుణాదులు: అంటే 7తో బాటు, 14,21,28,35,42,49,56,63లు గుణకాలు.

15873×7=111111
15873×14=222222
15873×21=333333
15873×28=444444
15873×35=555555
15873×42=666666
15873×49=777777
15873×56=888888
15873×63=999999.

క. నవగతిరసగతిసంఖ్యకు
నవగుణనేత్రములఁ బెంచినట్టి ఫలంబుల్
ప్రవిమల తద్ద్విగుణాదుల
నవిరతముగ గుణితఫలము లవి యెన్నియగున్. **79**

గుణకం ౨౩౯ । ౪౭౮ । ౭౧౭ । ౯౫౬ । ౧౧౯౫ । ౧౪౩౪ । ౧౬౭౩ । ౧౯౧౨ । ౨౧౫౧, **ఒడ్డు** ౪౬౪౯, **లబ్ధాలు** ౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯.

నవ–9, గతి–4, రస–6, గతి–4, కాబట్టి సంఖ్య 4649 – ఒడ్డు గుణకం: నవ–9, గుణ–3, నేత్ర–2 అంటే 239, దీని ద్విగుణాదులు : 478, 717, 956, 1195, 1434, 1673, 1912, 2151.

4649×239=1111111
4649×478=2222222
4649×717=3333333
4649×956=4444444
4649×1195=5555555
4649×1434=6666666
4649×1673=7777777
4649×1912=8888888
4649×2151=9999999.

క. గిరితర్క రామనగరాం
బరగగనాచలబుతుత్రివర్గగుణములన్
బరగిన గుణములఁ బెంచిన
నరుదుగఁ దద్ద్విగుణితాదిహతు లెన్నియగున్. **80**

గుణకం ౩ । ౬ । ౯ । ౧౨ । ౧౫ । ౧౮ । ౨౧ । ౨౪ । ౨౭, **ఒడ్డు** ౩౩౬౭౦౦౩౩౬౭, **లబ్ధాలు** ౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧ । ౨౦౨౦౨౦౨౦౨౦౨ । ౩౦౩౦౩౦౩౦౩౦౩ । ౪౦౪౦౪౦౪౦౪౦౪ । ౫౦౫౦౫౦౫౦౫౦౫ । ౬౦౬౦౬౦౬౦౬౦౬ । ౭౦౭౦౭౦౭౦౭౦౭ । ౮౦౮౦౮౦౮౦౮౦౮ । ౯౦౯౦౯౦౯౦౯౦౯.

గిరి–7, తర్క–6, రామ–3, నగర–3, అంబర–0, గగన–0, అచల–7, ఋతు–6, త్రివర్గ–3, గుణములు–3, కాబట్టి సంఖ్య= 3367003367–ఒడ్డు గుణకం: గుణములు 3, ద్విగుణితాదిగా అంటే 3తో 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27ల గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధం.

3367003367×3=10101010101

3367003367×6=20202020202

3367003367×9=30303030303

3367003367×12=40404040404

3367003367×15=50505050505

3367003367×18=60606060606

3367003367×21=70707070707

3367003367×14=80808080808

3367003367×27=90909090909.

క. నవగజగిరిహయరసఋతు
భవముఖశర వేదజలధిపావకగుణముల్
సవి కరశశిచంద్రుల నిడి
నవసంఖ్యను బెంచి మాకు నయముగఁ జెపుమా. 81

గుణకం ౯, ఒడ్డు ౧౧౨౨౩౩౪౪౫౫౬౬౭౭౮౯, లబ్ధం ౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧.

నవ–9, గజ–8, గిరి–7, హయ–7, రస–6, ఋతు–6, భవముఖ–5, శర–5, వేద–4, జలధి–4, పావక–3, గుణములు–3, సవి–2, కర–2, శశి–1, చంద్ర–1, కాబట్టి సంఖ్య: 1122334455667789–ఒడ్డు. గుణకం–9: లబ్ధం=1122334455667789×9=1010101010 1010101.

క. ఇందుగగనేందుసంఖ్యను
బొందుగ నీశానసంఖ్య పొలుపు గుణితమై
యందముగఁ బెంచి లబ్ధము
పొందుగఁ ద్విగుణాదిఫలముఁ బూజ్యత చెపుమా. 82

గుణకం ౧౧, ఒడ్డు ౧౦౧, లబ్ధం ౧౧౧౧.

ఇందు–1, గగన–0, ఇందు–1, సంఖ్య=101–ఒడ్డు. దీనిని మల్లన ఈశాన సంఖ్య అంటున్నాడు. గుణకం–11, ద్విగుణాదిగా అంటే 11 తరువాత 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 కాబట్టి లబ్ధాలు:

101×11=1111

101×22=2222

101×33=3333

101×44=4444

101×55=5555

101×66=6666

101×77=7777

101×88=8888

101×99=9999.

క. పురతుహినకిరణపుష్కర
గిరికరినవనయనచంద్రకీర్తులసంఖ్యన్
గిరితురగంబులఁ బెంచిన
వరుసను శివుకంఠమాల వచ్చును బ్రీతిన్. 83

గుణకం ౭౭, ఒడ్డు ౧౨౯౮౭౦౧౩, లబ్ధం ౧౦౦౦౦౦౦౦౦౧.

పుర–3, తువేనకరిణ–1, పుష్కర–0, గిరి–7, కరి–8, నవ–9, నయన–2, చంద్ర–1 గనక సంఖ్య= 12987013–ఒడ్డు గుణకం: గిరి–7,

తురగంబులు–7 అంటే 77 లబ్ధం= 12987013×77=1000000001. "ఈ సంఖ్యను తన ఇష్టదైవానికి కంఠమాలగా సమర్పిస్తున్నాడు మల్లన"

క. **గిరినగరాంబరహయములు**
హరనయనాంబరనగాగ్నులటునిడి గుణనం
ఖ్యరహిన్ దద్విగుణాదులఁ
బరువడి గుణియించి చెప్పు ఫల మది మాకున్. **84**

గుణకం ౩ । ౬ । ౯ । ౧౨ । ౧౫ । ౧౮ । ౨౧ । ౨౪ । ౨౭, **ఒడ్డు** ౩౭౦౩౭౦౩౭, **లబ్ధాలు** ౧౧౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯౯౯.

గిరి–7, నగర–3, అంబర–0, హయములు–7, హరనయన–3, అంబర–0, నగ–7, అగ్నులు–3, సంఖ్య=37037037–ఒడ్డు గుణకం= 3చేత, తద్విగుణాదులు అంటే 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27లతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధము?

37037037×3=111111111
37037037×6=222222222
37037037×9=333333333
37037037×12=444444444
37037037×15=555555555
37037037×18=666666666
37037037×21=777777777
37037037×24=888888888
37037037×27=999999999.

గీ. **మొదలఁ దుదయందుఁ మూడేళ్ళ నొదవనిలిపి**
నడుమ సున్నల మూఁడిడి నయముతోడ

వాని పదమూఁట గుణియించి వరుసతోడ
నినుమడించిన లబ్ధంబు లెఱుఁగఁ జెపుమ. **85**

గుణకం ౧౩ । ౨౬ । ౩౯ । ౫౨ । ౬౫ । ౭౮ । ౯౧ । ౧౦౪ । ౧౧౭, **ఒడ్డు** ౭౭౭౦౦౦౭౭౭, **లబ్ధాలు** ౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧ । ౨౦౨౦౨౦౨౦౨౦౨ । ౩౦౩౦౩౦౩౦౩౦౩ । ౪౦౪౦౪౦౪౦౪౦౪ । ౫౦౫౦౫౦౫౦౫౦౫ । ౬౦౬౦౬౦౬౦౬౦౬ । ౭౦౭౦౭౦౭౦౭౦౭ । ౮౦౮౦౮౦౮౦౮౦౮ । ౯౦౯౦౯౦౯౦౯౦౯.

ఆదిలో మూడు ఏడులు, అంతంలో మూడు ఏడులు, మధ్య మూడు సున్నాలుంచితే లభించే సంఖ్య 777000777 దీనిని ఒడ్డుగా, 13ను, దాని ద్విగుణాదితమును గుణకాలుగా గుణిస్తే ఏర్పడే లబ్ధాలు:

777000777×13=10101010101
777000777×26=20202020202
777000777×39=30303030303
777000777×52=40404040404
777000777×65=50505050505
777000777×78=60606060606
777000777×91=70707070707
777000777×104=80808080808
777000777×117=90909090909.

క. **పురభూధరసాయకములఁ**
కరిబాణేందుమునిసాయకవిధుల నిడి త
ద్గిరిసంఖ్య నొనరఁ బెంచిన
బరువడిఁ దద్విగుణితాది ఫలమెంత యగున్. **86**

గుణకం ౭ । ౧౪ । ౨౧ । ౨౮ । ౩౫ । ౪౨ । ౪౯ । ౫౬ । ౬౩, **ఒడ్డు** ౧౫౭౧౫౮౫౭౩, **లబ్ధాలు** ౧౧౦౦౧౧౦౦౧౧ । ౨౨౦౦౨౨౦౦౨౨ ।

౩౩౦౦౩౩౦౦౩౩ । ౪౪౦౦౪౪౦౦౪౪ । ౫౫౦౦౫౫౦౦౫౫ । ౬౬౦౦౬౬౦౦౬౬ । ౭౭౦౦౭౭౦౦౭౭ । ౮౮౦౦౮౮౦౦౮౮ । ౯౯౦౦౯౯౦౦౯౯.

పుర-3, భూధర-7, సాయకము-5, కరి-8, బాణ-5, ఇందు-1, ముని-7, సాయక-5, విధుడు-1, కాబట్టి సంఖ్య=157158573-ఒడ్డు. గుణకం-గిరి (7) సంఖ్య, దాని ద్విగుణాదులు అంటే 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 ఏర్పడే లబ్ధాలు:

157158573×7=1100110011
157158573×14=2200220022
157158573×21=3300330033
157158573×28=4400440044
157158573×35=5500550055
157158573×42=6600660066
157158573×49=7700770077
157158573×56=8800880088
157158573×63=9900990099.

సీ. గిరినిధిపుష్కరశరవహ్ని గుణనభో౽
నలవేదదంతుల నలువుకొలిపి
రసఋతు పావకరసశై లసంఖ్యల
శశిగగనాంబరశై లములను
చతురాననాంబరశరవహ్ని భువనాంత
రిక్షాగ్ని వేదసులక్షణముగ
గజఋతురసమూర్తికర్మశైలంబుల
సోమసంఖ్యలఁ గూర్చి సొంపుగాను

అ. నగ్ని ఋతువులందు నమరఁ దొమ్మిదిమార్లు
ధరణిపై గుణించి వరుసతోడఁ

గన్నలబ్ధ మెటిఁగి గణితవిధిజ్ఞులు
చొప్పుమిగుల మాకుఁ జెప్పవలయు. 87

గుణకం ౬౩, **ఒడ్డు** ౧౭౬౩౬౬౮౪౩౦౩౩౫౦౯౭౦౦౧౭౬౩౬౬౮౪౩౦౩౩౫౦౯౭, **లబ్ధం** ౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧.

ఇది ఒక సుదీర్ఘ సంఖ్యాకమైన గుణకారం

గిరి-7, నిధి-9, పుష్కర-0, శర-5, వహ్ని-3, గుణ-3, నభ-0, అనల-3, వేద-4, దంతి-8, రస-6, ఋతు-6, పావక-3, రస-6, శైల-7, శశి-1, గగన-0, అంబర-0, శైల-7, చతురానన-9, అంబర-0, శర-5, వహ్ని-3, భావన-3, అంతరిక్ష-0, అగ్ని-3, వేద-4, గజ-8, ఋతు-6, రస-6, మూర్తి-3, కర్మ-6, శైల-7, సోమ-1, ఈ సుదీర్ఘసంఖ్య= 176366843033509700176366843033 5097-ఒడ్డు గుణకం: అగ్ని-3, ఋతువు-6 అంటే 63. కాబట్టి

176366843033509700176366843033 5097×63=

111111111111111111111111111111111111-36 ఒకట్లు. మల్లన, తొమ్మిది మార్లు వరుసతోడ గుణించి-అనడంలో భావం ఈ 36 అంకెల సంఖ్యను వరుసగా 63 ద్విగుణాదులు అంటే 63ను 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9తో గుణించినవి గుణకాలు - అప్పుడు, మనకు మునుపటి సమస్యలలోలాగా వరుస లబ్ధాలు.

222............................222 - ముప్పదిఆరుస్థానాలు
333............................333 - ముప్పదిఆరుస్థానాలు
444............................444 - ముప్పదిఆరుస్థానాలు
555............................555 - ముప్పదిఆరుస్థానాలు
666............................666 - ముప్పదిఆరుస్థానాలు
777............................777 - ముప్పదిఆరుస్థానాలు

888..............................888 – ముప్పదిఆరుస్థానాలు

999..............................999 – ముప్పదిఆరుస్థానాలు

ఇక్కడ వరుసగుణకాలు 63, 126, 189, 252, 315, 378, 441, 504, 567

క. భూచంద్రకరత్రయభూ
తాచలశూన్యాబ్ధివసుకరాష్టత్రయశూ
న్యాచలజలనిధికరహిమ
రోచుల నిడి నిధులఁబెంచి రూఢిగఁ జెపుమా. 88

గుణకం ౯, ఒద్దు ౧౨౪౭౦౩౮౨౮౪౦౭౫౩౨౧౧, **లబ్ధం** ౧౧౨౨౩౩౪౪౫౫౬౬౭౭౮౮౯౯.

భూ–1, చంద్ర–1, హర–2, త్రయ–3, భూత–5, అచల–7, శూన్య–0, అబ్ధి–4, వసు–8, కర–2, అష్ట–8, త్రయ–3, శూన్య–0, అచల–7, జలనిధి–4, కర–2, హిమరోచి–1.

ఈ సంఖ్య=12470382840753211–ఒద్దు గుణకం: నిధులు –9

లబ్ధం=12470382840753211×9=112233445566778899.

క. సరసిజభవగుణదివశర
శరపంచముఖర్తుచంద్రసాయకములు దా
వరుసనిడి నిధిహుతాశన
కరముల గుణియించి చెప్పు గణితవిధిజ్ఞా. 89

గుణకం ౨౩౯, **ఒద్దు** ౫౧౬౫౫౫౫౦౩౯, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౭౬౫౪౩౨౧.

సరసిజభవ–9, గుణ–3, దివ–0, శర–5, శర–5, పంచ–5, ముఖ–5, ఋతు–6, చంద్ర–1, సాయక–5. ఈ సంఖ్య=5165555039– ఒద్దు గుణకం: నిధి–9 హుతాశన–3. కర–2 అంటే 239తో గుణిస్తే వచ్చేలబ్ధం=5165555039×239=1234567654321.

క. ఎనిమిది యేనులు వరుసను
నెనయంగా నెనిమిదాఱ్లు నెనయఁగ దావి
న్నను వొందనిలిపి నిధులను
గనుగొనఁగాఁ బెంచి చెప్పు గణితవిధిజ్ఞా. 90

గుణకం ౯, ఒద్దు ౬౬౬౬౬౬౬౬౫౫౫౫౫౫౫౫, **లబ్ధం** ౫౯౯౯౯౯౯౯౮౯౯౯౯౯౯౯౫.

సంఖ్య= ఎనిమిది యేనులు (ఐదులు), ఎనిమిది ఆర్లు=6666666655555555–ఒద్దు గుణకం:9

లబ్ధం=6666666655555555×9=59999999899999995

గీ. రంధ్రనాగగిరిధరర్తుల ఋతుబాణ
బాణవేదగతుల భర్గనయన
రామనేత్రపక్షభూమిచంద్రుల నిడి
తగగ నిధులఁ బెంపు తద్గుణముగ. 91

గుణకం ౯, ఒద్దు ౧౧౨౨౩౩౪౪౫౫౬౬౭౭౮౯, **లబ్ధం** ౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧౦౧.

రంధ్ర=9, నాగ–8, గిరి–7, ధర–7, ఋతు–6, ఋతు–6, బాణ–5, బాణ–5, వేద–4, గతి–4, భర్గనయన–3, రామ–3, నేత్ర–2, పక్ష–2, భూమి–1, చంద్రుడు–1.

సంఖ్య=1122334455667789–ఒద్దు గుణకం= నిధి–9

లబ్ధం=1122334455667789×9=10101010101010101.

క. సరణి శశివేదదశగిరి
నరసిజభవరంధ్రదంతిశైలశరక్ష్మా
జలధికరబాణధరణుల
సరి శశికరిసంఖ్యఁ బెంచి చయ్యన చెపుమా. 92

గుణకం ౮౧, **ఒడ్డు** ౧౫౨౪౧౫౭౮౯౯౭౧౦౪౧, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౫౬౭౮౯౮౭౬౫౪౩౨౧.

శశి–1, వేద–4, దశ–10, గిరి–7, సరసిజభవ–9, రంధ్ర–9, దంతి–8, శైల–7, శర–5, క్ష్మా–1, జలధి–4, కర–2, బాణ–5, ధరణి–1

సంఖ్య=152415789971041–ఒడ్డు.

గుణకం: శశి–1, కరి–8 అంటే 81తో గుణిస్తే

లబ్ధం=152415789971041×81=12345678987654321

చ. జలధికరాద్రిశూన్యగతిశైలమునీంద్రహయాద్రిరంధ్రముల్
విలసితచంద్రవార్ధి నవవేదమహాంబరస ప్తవహ్నులుం
గలయఁగఁ రాశి దానిడియుఁ గ్రక్కునఁ బెట్టుచు బ్రహ్మసంఖ్యతో
వెలయఁగఁ బెంచి తత్ఫలము విశ్రుతినంది యెఱుంగఁ జెప్పుమా. 93

గుణకం ౯, **ఒడ్డు** ౩౭౦౪౯౪౧౯౭౭౭౭౪౦౭౨౪, **లబ్ధం** ౩౩౩౪౪౪౭౭౭౯౯౯౬౬౬౫౧౬.

జలధి–4, కర–2, అద్రి–7, శూన్య–0, గతి–4, శైల–7, మునీంద్ర–7, హయ–7, అద్రి–7, రంధ్ర–9, చంద్ర–1, వార్ధి–4, నవ–9, వేద–4, మహాంబర–0, సప్త–7, వహ్ని–3

వీటిచే ఏర్పడే సంఖ్య:37049419777740724–ఒడ్డు గుణకం బ్రహ్మసంఖ్య–9

లబ్ధం=37049419777740724×9=333444777999666516.

గీ. తురగవహ్నిగగనతురగాగ్నిగగనాద్రి
గుణముసంఖ్య నిలిపి గుఱుతుగాను
తగ గుణంబుతోడఁ దద్ద్విగుణాదిక
ఫలములెన్ని మాకుఁ దెలియఁ జెపుమ. 94

గుణకం ౩ । ౬ । ౯ । ౧౨ । ౧౫ । ౧౮ । ౨౧ । ౨౪ । ౨౭, **ఒడ్డు** ౩౭౦౩౭౦౩౭, **లబ్ధాలు** ౧౧౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬౬౬। ౭౭౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯౯౯.

తురగ–7, వహ్ని–3, గగన–0, తురగ–7, అగ్ని–3, గగన–0, అద్రి–7, గుణము–3, ఈ సంఖ్య 37037037–ఇది ఒడ్డు. గుణకం: గుణం–3, తద్ద్విగుణాదికసంఖ్యలు, అంటే 6,9,12,15,18,21,24,27

37037037×3=111111111

37037037×6=222222222

37037037×9=333333333

37037037×12=444444444

37037037×15=555555555.

37037037×18=666666666.

37037037×21=777777777.

37037037×24=888888888.

37037037×27=999999999.

చ. కమలజవేదవర్ణములు కన్నులు పక్షము చంద్రతర్కముల్
ఖము గుణబాణజీవములు కన్నులునగ్నులు శాస్త్రచంద్రులు
న్నమరఁగ దంతిఖాంబరము నబ్ధియు నంబరచక్షు లుంచియుం
గమలజవేదముల్ పెనిచి గ్రక్కునఁ జెప్పుము మంత్రిశేఖరా. 95

గుణకం ౪౯ । ౯౮ । ౧౪౭ । ౧౯౬ । ౨౪౫ । ౨౯౪ । ౩౪౩ । ౩౯౨ । ౪౪౧, **ఒడ్డు** ౨౦౪౦౮౧౬౩౨౬౫౩, ౦౬౧౨౨౪౪౯ **లబ్ధాలు** ౧౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౧ । ౨౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౨ । ౩౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౩ । ౪౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౪ । ౫౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦

౦౦౦౫ । ౬౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౬ । ౭౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦ ౦౦౦౦౦౦౦౦౭ । ౮౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౮ । ౯౦౦౦౦౦౦౦ ౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౦౯.

కమలజ–9, వేద–4, వర్ణ–4, కన్నులు–2, పక్షము–2, చంద్ర–1, తర్కం–6, ఖము–0, గుణ–3, బాణ–5, జీవము–5, కన్నులు–2, అగ్నులు–3, శాస్త్ర–6, చంద్ర–1, దంతి–8, ఖ–0, అంబర–0, అబ్ధి–4, అంబర–0, చక్షు–2

సంఖ్య= మల్లన పద్యం ప్రకారం, 204008163255306122449 కానీ ఇక్కడ ఈ సంఖ్యా నిర్మాణంలో కొంత వ్యత్యయం చోటు చేసుకున్నది. ఈ సుదీర్ఘసంఖ్యలో 21 అంకెలున్నాయి. బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారి పరిశోధితప్రతిలో ఈ సంఖ్య ఒద్దు: 20408163265306122449–20 అంకెల సంఖ్య. మొదటి నుండి (ఎడమనుండి కుడివైపునకు) నాలుగు, ఐదుస్థానాలలో సున్నలు ఉండాలి మల్లన పద్యం ప్రకారం. ఖ–0, అంబరం–0, కాబట్టి ఇట్లాగే గణిస్తే 11స్థానంలో –5, 12వ స్థానంలో జీవము అంటే ప్రాణం, పంచప్రాణాలు–5 ఉన్నది. శాస్త్రిగారి ప్రతిలో ఇవి 10వ స్థానంలో 6, 11వ స్థానంలో 5గా ఉన్నది.

అట్లాగే విద్వాన్ గొట్టుముక్కుల సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రిగారి (2005 సం॥) ప్రతిలోనూ ఈ మార్పును గమనించవచ్చు. శ్రీసుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రిగారు దీనిని గురించి ప్రస్తావించియున్నారు కూడా.

తెలుగు అకాడమీ హైదరాబాదు (2007) వారు ప్రచురించిన విద్వాన్ తెన్నేటి వారి మనోరంజనీ వ్యాఖ్యలోనూ ఈ మార్పే చోటు చేసుకొన్నది. అయితే మల్లన ఎందుకు ఈ వ్యత్యయాన్ని ప్రవేశపెట్టాడో తెలియడంలేదు– ఒకవేళ ప్రక్షిప్తమా? లేఖనదోషమా? కాబట్టి మనం ఆసక్తికరమైన గుణకారం దృష్ట్యా ఒద్దును 20408163265306122449గా తీసుకోవలె.

గుణకాలు: కమలజ–9, వేదములు–4 అంటే 49 దీని ద్విగుణాదికాలు అంటే 98, 147, 196, 245, 294, 343, 392, 441 తొమ్మిది గుణకాలు కాబట్టి లబ్ధాలు తొమ్మిది –

20408163265306122449×49=1000000000000000000001

తరువాత

20408163265306122449×98=2000000000000000000002
20408163265306122449×147=3000000000000000000003
20408163265306122449×196=4000000000000000000004
20408163265306122449×245=5000000000000000000005
20408163265306122449×294=6000000000000000000006
20408163265306122449×343=7000000000000000000007
20408163265306122449×392=8000000000000000000008
20408163265306122449×441=9000000000000000000009.

క. పురనగవస్విషుసోమాం
బరవహ్న్యగదంతిపంచభపతుల నిడి తా
గిరులం బెంచిన ఫలములు
నిరవుగ నవి యెన్నియయ్యె నెఱుఁగఁగఁ జెపుమా. 96

గుణకాలు ౭ । ౧౪ । ౨౧ । ౨౮ । ౩౫ । ౪౨ । ౪౯ । ౫౬ । ౬౩, **ఒద్దు** ౧౫౮౭౩౦౧౫౮౭౩, **లబ్ధాలు** ౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧౧. **ఇట్లాగే ద్విగుణాది హతములు.**

పుర–3, నగ–7, వసు–8, ఇషు–5, సోమ–1, అంబర–0, వహ్ని–3, అగ–7, దంతి–8, పంచ–5, భపతి–1, కాబట్టి సంఖ్య: 15873015873– ఒద్దు గుణకం: గిరి–7, దీని ద్విగుణాదికము అంటే 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 తొమ్మిది గుణకాలతో హెచ్చిస్తే ఏర్పడేలబ్ధాలు, వరుసగా

15873015873×7=111111111111
15873015873×14=222222222222

15873015873×21=333333333333

15873015873×28=444444444444

15873015873×35=555555555555

15873015873×42=666666666666

15873015873×49=777777777777

15873015873×56=888888888888

15873015873×63=999999999999.

గీ. నామభూమిదివులు నగగజనిధులును
బాహుచంద్రుల నిడి బాగుగాను
నది శైలసంఖ్య నమరంగఁ బెంచిన
ఫలము జెప్పు మాకు సలలితముగ. 97

గుణకాలు ౭౭ । ౧౫౪ । ౨౩౧ । ౩౦౮ । ౩౮౫ । ౪౬౨ । ౫౩౯ । ౬౧౬ । ౬౯౩, **ఒడ్డు** ౧౨౯౮౭౦౧౩, **లబ్ధాలు** ౧౦౦౦౦౦౦౦౦౧ **ఇట్లాగే** ౯ **దాఁక.**

నామ–3, భూమి–1, దివి–0, నగ–7, గజ–8, నిధులు–9, బాహు–2, చంద్ర–1, వీటిచే ఏర్పడిన

సంఖ్య=12987013–ఒడ్డు

గుణకాలు: అద్రి–7, శైల–7 అంటే 77, దీని ద్విగుణాదికాలు: 154, 231, 308, 385, 462, 539, 616, 693: ఈ తొమ్మిది గుణలబ్ధాలు

12987013×77=1000000001

12987013×154=2000000002

12987013×231=3000000003

12987013×308=4000000004

12987013×385=5000000005

12987013×462=6000000006

12987013×539=7000000007

12987013×616=8000000008

12987013×693=9000000009.

గీ. రంధ్రనాగభూధర ర్తులు శరములు
వేదలోకబాహువిధులు నిలిపి
నవియుఁ దొమ్మిదింట నమరంగఁ బెంచిన
ఫలముఁ జెప్పు మాకు సలలితముగ. 98

గుణకాలు ౯ । ౧౮ । ౨౭ । ౩౬ । ౪౫ । ౫౪ । ౬౩ । ౭౨ । ౮౧, **ఒడ్డు** ౧౨౩౪౫౬౭౮౯, **లబ్ధం** ౧౧౧౧౧౧౧౧౦౧ **ఇట్లాగే** ౯ **దాఁక.**

రంధ్ర–9, నాగ–8, భూధర–7, ఋతు–6, శర–5, వేద–4, లోక–3, బాహు–2, విధు–1...సంఖ్య=123456789–ఒడ్డు

గుణకాలు: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81

లబ్ధాలు:

123456789×9=1111111101

123456789×18=2222222202

123456789×27=3333333303

123456789×36=4444444404

123456789×45=5555555505

123456789×54=6666666606

123456789×63=7777777707

123456789×72=8888888808

123456789×81=9999999909.

క. బాహువేదతర్క బహునిధిచంద్రులఁ
లోక బాణములను జోక నిడియుఁ

బదియు నెనిమిదింటఁ బరగంగ గుణియించి
ఫలముఁ జెప్పు మాకు సలలితముగ. 99

గుణకం ౧౮, **ఒద్దు** ౫౩౧౯౬౪౨, **లబ్ధం** ౯౫౭౫౩౫౫౬.

బాహు–2, వేద–4, తర్క–6, నిధి–9, చంద్ర–1, లోక–3, బాణ–5 కాబట్టి సంఖ్య: 5319642–ఒద్దును గుణకం: 18తో గుణిస్తే లబ్ధం: 5319642×18=95753556

క. శశిశశికరకరరుద్రుల
విశదముగా నిలిపి వాని వేగమె యేకా
దశసంఖ్యఁ బెంచి చెప్పుము
పశుపతిపాదాబ్జభృంగ పరమశుభాంగా. 100

గుణకం ౧౧ , **ఒద్దు** ౧౧౨౨౧౧, **లబ్ధం** ౧౨౩౪౩౨౧.

శశి–1, శశి–1, కర–2, కర–2, రుద్ర–11, కాబట్టి సంఖ్య: 112211–ఒద్దును గుణకం: 11తో హెచ్చిస్తే, లబ్ధం: 1234321.

క. పురశశిగగనాచలములఁ
గరినిధినయనేందుసంఖ్యఁ గ్రమమున నిడి తా
గిరితురగసంఖ్యఁ బెంచిన
వరుసన్ శివుకంఠమాల వచ్చుం బ్రీతిన్. 101

గుణకం ౭౭, **ఒద్దు** ౧౨౯౮౭౦౧౩, **లబ్ధం** ౧౦౦౦౦౦౦౦౦౦౧.

పుర–3, శశి–1, గగన–0, అచల–7, కరి–8, నిధి–9, నయన–2, ఇందు–1. ఈ సంఖ్య 12987013–ఒద్దు. దీనిని గుణకం: గిరి–7, తురగ–7, అంటే 77తో పెంచితే లబ్ధం–12987013×77=1000000001.

గుణకార పరిచ్ఛేదం సమాప్తం

ఇది శ్రీ...సారసంగ్రహ గణితశాస్త్రంబునందు ప్రథమగుణకారము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

పరికర్మగణితము

భాగహారము

వ. అందుఁ బ్రథమపరికర్మగుణకారంబు చెప్పినతదనంతరంబు ద్వితీయభాగహారంబు చెప్పెద నది యెట్టి దనిన;

క. అం దొనర భాజ్యమానము
క్రిందను దద్భాగహరము కీడ్పడ నిడి త
ద్బృందసదృశాపవర్తన
మందినయవి యయ్యె భాగహారఫలంబుల్.[1] 1

భావం: భాజ్యమానము అంటే భాగింపబడే సంఖ్యక్రింద భాగహారము అంటే భాగించే సంఖ్యనుంచి ఆ బృందమును అంటే మొత్తాన్ని, తత్ సదృశముగా అంటే సమానభాగాలుగా అపవర్తనము అంటే విభజించినప్పుడు అవి భాగహారఫలములవుతాయి.

క. ఎనిమిది వేలును నూఱును
నెనయఁగఁ దొంబదియు రెండు హేమంబులు సే
కొని యఱువదినలువుర కిడ
గ నందు నొక్కనికి నెన్ని గణితవిధిజ్ఞా! 2

ధనం ౮౧౯౨, **జనులు** ౬౪, **లబ్ధం** ౧౨౮

---

(1) కొన్ని ప్రతులలో నీ క్రింది పద్యము లధికముగానున్నవి.

క. ధనము విభజించు పట్లను । గుణకమునకు ధనముమీఁదఁ గొంచెం బైనన్
జను మవ్వల లబ్దములోఁ । గొనకొని యొకసున్న పెట్టికొనుము మహాత్మా.

క. ధన మధికము గా మిగిలినఁ । గొను పైయెక్కంబు ధనము కొంచెం బైనన్.
వెనుకటి యెక్కము గైకొను । మన సుగుణోదార భాగహారమునందున్.

క. ధర గుణకముపైఁ జిద్రుపలు । పరగిన ధన మెల్లఁ జిదురుపల నధికోనం
బరసి భజియింస లబ్ధము । నిరుపోలిక వచ్చునంద్రు నీరజనాభా.

భావం: ఎనిమిదివేల నూట తొంబైరెండు హేమముల (హే॥8192)ను అరువది నలువురకు పంచితే ఒక్కొక్కనికి ఎన్ని వస్తాయి? భాజమానం : 8192 భాగహారం: 64, భాగహారఫలం: 8192÷64=128

క. వితతముగ సప్తవింశతి
శతములపై నొకటి కనకసంహతి; దీనిన్
బ్రతిగా ముప్పదియేడ్వుర
[1]కృతమున నిడ నొకని కెన్ని యేర్పడుఁ జెపుమా! 3

రాశిధనం ౨౭౦౧, **జనులు** ౩౭, **లబ్ధం** ౭౩.

భాజ్యం (భాజ్యమానం) సప్తవింశతి శతములపై నొకటి అంటే 2701 కనకసంహతిని భాజకం (భాగహారం) 37 మందికి పంచితే. ఒక్కొక్కరికి, 2701÷37=73 భాగఫలం.

క. నిధిజలనిధిలోకాంబర
విధుపరిమిత కనకరాశి విభజించినచో
నిధిగిరిభాగము లయ్యెను
బుధనుత! యందొకని [2]పాలిపురు లెన్ని యగున్. 4

రాశిధనం ౧౦౩౪౯, **జనులు** ౭౯, **లబ్ధం** ౧౩౧.

క. సమరాశి నధిక రాశిని । సమముగ గుణకంబు నిలిపి స్వర్ణము కొఁలదిం
గ్రమ మెఱిఁగియు భాగించిన । కొమరుగ నూహించి మిగిలి కొంచెము గాఁగన్.

సీ. భాగహారము (a) సేయఁబడిన యెక్కంబుపై పాతికల్ వీసమై పరగుఁ గాను
లేతేర నవిక్రమ మెఱిఁగి యాగుణకంబు లెక్క లన్నియువిరళించి రాశి
గలసి రాశి (b) భజించి వెలసిన లబ్ధముల్ పాతికలకు నాల్గుపాళ్లు వీస
ములకు షోడశభాగములు కానులకు నఱువదినాల్గు భాగముల్ వరుసతోడ

గీ. హెచ్చుగూడిన లబ్ధంబు వచ్చు నెఱకు । సంఖ్య లవియెంతటికినైన జగతియందు
నఖిలగణితార్థ రచనా విహారమతులు । ప్రణుతి సేయంగఁ దగినట్టి గణకులార.
() సేయుపగిదిని గుణకంబు పైనరపాతిక పరకకాను ।
() భజియింప లబ్ధముల్ పాతికలకు నాల్గుపాళ్లు పరకలకష్టభాగవీస ।
(1) కతిశయముగఁ గొన్న నొకని కవి యెన్ని యగున్.
(2) పాలు పొసఁగం జెపుమా.

నిధి–9, జలనిధి–4, లోక–3, అంబర–0, విధు–1, కాబట్టి కనకరాశి=10349 దీనిని నిధి–9, గిరి–7 అంటే 79 భాగములు చేస్తే ఒక్కొక్క భాగానికి 10349÷79=131 భాగఫలం.

గీ. శశిపయోధిచంద్రజలధి శశాంకుల
సంఖ్యగలుగు హేమచయము గూర్చి
[1]యేక రహితమైన యెనుబండ్రు చేకొన్న
సందు నొకని కెన్నియగును జెపుఁడు. 5

రాశిధనం ౧౪౧౪౧, **జనులు** ౭౯కి, **లబ్ధం** ౧౭౯.

శశి–1, పయోధి–4, చంద్ర–1, జలధి–4, శశాంక–1 కాబట్టి హేమచయసంఖ్య 14141. దీనిని భాజ్యంగా, ఏకరహితమైన ఎనుబండ్రు అంటే ఒక్కటి తగ్గిన ఎనభై అంటే 80–1=79ని భాజకముగా, భాగిస్తే భాగఫలం 14141÷79=179.

క. తురగేందురామశశిగుణ
పరిమిత మగుమాడ లర్థిఁ బాలిడుకొని య
చ్చెరువుగ ముప్పదితొమ్మం
డ్రరయఁగ నందొకనిభాగ మది యెంతయగున్. 6

రాశిధనం ౩౧౩౧౭, **జనులు** ౩౯, **లబ్ధం** ౮౦౩.[2]

తురగ–7, ఇందు–1, రామ–3, శశి–1, గుణ–3, కాబట్టి భాజ్యం=31317 ఈ సంఖ్యను భాజకం 39తో భాగిస్తే భాగఫలం= 31317÷39=803.

గీ. రాజతర్కనేత్ర రసగుణ పరిమిత
కనక సంఖ్యఁ బుణ్యజనము ప్రీతి

(1) యెసగ నొకఁడుతక్క నెనుబండ్రు గూర్చిన నేకభాగ సంఖ్య యెంతవచ్చు
(2) ఇక్కడ నొక శ్లోకమునకుఁ దెలుఁగు లేదు.

నిమ్ముగాఁగఁ దెచ్చి తొమ్మండ్రు చేకొన్న

నేకభాగసంఖ్య యెంత వచ్చు. 7

రాశిధనం ౩౬౨౬౧, జనులు ౯కి, లబ్ధం ౪౦౨౯ వచ్చును.

రాజ–1, తర్క–6, నేత్ర–2, రస–6, గుణ–3, కాబట్టి భాజ్యం= 36261. ఈ సంఖ్యను భాజకం 9తో విభజిస్తే భాగఫలం=36261÷9=4029.

గీ. **చంద్రనేత్ర వహ్ని జలనిధిశరరస**

భూతగతిగుణాక్షి శీతరశ్మి

సంఖ్య హేమచయము శశివేదగతిసంఖ్యఁ

బాలుగొన్న నేకభాగమెంత. 8

రాశిధనం ౧౨౩౪౫౬౫౪౩౨౧, జనులు ౪౪౧, లబ్ధం ౨౭౯౯౪౬౮౧.

చంద్ర–1, నేత్ర–2, వహ్ని–3, జలనిధి–4, శర–5, రస–6, భూత–5, గతి–4, గుణ–3, అక్షి–2, శీతరశ్మి–1 తో ఉన్న భాజ్యం 12345654321 ని భాజకం: శశి–1, వేద–4, గతి–4, అంటే 441తో భాగిస్తే, భాగఫలం=12345654321÷441=27994681.

క. **పురగజగతి వసులోచన**

పరిమిత మగుమణులు శూలిభవనంబులకున్

బరగఁ బదుమూఁటి కర్చన

విరచించిన సెన్ని యేకవేశ్మంబునకున్. 9

జనులు ౧౩కి, రాశి ౨౮౪౮౩, లబ్ధం ౨౧౯౧.

పుర–3, గజ–8, గతి–4, వసు–8, లోచన–2, కాబట్టి భాజ్యం=28483, భాజకం=13, భాగఫలం=28483÷13=2191.

క. [1]**చంద్రభూతతర్కజలనిధిబాహులఁ**

గలుగు హేమచయము గరిమమీఱ

(1) ఇఁకమీఁది భాగహారపద్యములకు సంస్కృతమూలము లేదు. అవి మల్లనరచితములు కావేమో.

జనుల నిధులలోన ననునొందగా నందు

నేకభాగసంఖ్య యెంతవచ్చు. 10

రాశిధనం ౨౪౬౫౧, జనులు ౯కి, లబ్ధం ౨౬౩౯.

చంద్ర–1, భూత–5, తర్క–6, జలనిధి–4, బాహు–2, కాబట్టి భాజ్యం=24651 భాజకం–నిధి–9 గనక భాగఫలం–24651÷9=2639.

క. **శరనయనాంబరరాములఁ**

బరగంగా నిలిపి వానిఁ బంచాస్త్రములన్

గర మర్థితోడ నిచ్చెను

నిరవొందఁగ నొకనిభాగ మెంతయు నయ్యేన్. 11

రాశిధనం ౩౦౨౫, జనులు ౫కి, లబ్ధం ౬౦౫.

శర–5, నయన–2, అంబర–0, రామ–3, కాబట్టి భాజ్యం=3025, భాజకం–పంచాస్త్రములు అంటే 5. భాగఫలం=3025÷5=605.

క. **నీరజరిపురసగుణముల**

వారిజసంభ వసుధాంశుపరుసం బంచన్

ఆరయనొకరికి నే మగుఁ

జేరినలబ్ధంబు చెప్పు చెన్నుగ మాకున్. 12

ఒద్దు ౩౬౧, భాగం ౧౯, లబ్ధం ౧౯.

నీరజరిపు–1, రస–6, గుణము–3, కాబట్టి భాజ్యం=361, భాజకం: వారిజ సంభవ–9, సుధాంశు–1 అంటే 19 భాగఫలం=361÷19=19.

క. **గిరిఋతుశరగతిపావక**

కరశశిమితసంఖ్యఁ గలుగు కనకపు మాడల్

గిరిబాహుశశులఁ గొన్నను

బరువడి నొక్కొకని కెన్ని భాగము వచ్చున్. 13

ఒద్దు మాడలు ౧౨౩౪౫౬౭, జనులు ౧౨౭, లబ్ధం ౯౭౨౧.

గిరి–7, ఋతు–6, శర–5, గతి–4, పావక–3, కర–2, శశి–1, కాబట్టి భాజ్యం=1234567. భాజకం: గిరి–7, బాహు–2, శశి–1 అంటే 127. భాగఫలం=1234567÷127=9721.

క. పురలోచన గిరిరసవసు
పరిమితమగు కనకసంఖ్యఁ బంచిన యెడలన్
బురవిధుల నెంత లబ్ధము
వరువడితోఁ బంచి చెప్పు బంధునిధానా. 14

ఒడ్డు మాడలు ౮౬౭౨౩, **జనులు** ౧౩, **లబ్ధం** ౬౬౭౧.

పుర–3, లోచన–2, గిరి–7, రస–6, వసు–8 కాబట్టి భాజ్యం=86723. భాజకం: పుర–3, విధి–1 అంటే 13. భాగఫలం=86723÷13=6671.

క. గుణనాగగతిగజాంబుధి
గణితము గలయట్టిధనము కడువేడుకతో
వెణఁదైన నిధులఁ గొన్నను
గుణనిధి యందొకని కెన్ని కొమరుగఁ జెపుమా. 15

ఒడ్డు మాడలు ౪౮౪౮౩, **భాగం** ౯, **లబ్ధం** ౫౩౮౭.

గుణ–3, నాగ–8, గతి–4, గజ–8, అంబుధి–4, భాజ్యం=48483, భాజకం: నిధులు–9తో భాగిస్తే, భాగఫలం=48483÷9=5387.

క. వెలయఁగ ఋతునగఋతుశర
ములసంఖ్యను గలుగుధనము ముదమున బంద్రెం
డుల విభజించియుఁ గొనఁ గుల
తిలకా యం దొకని కెన్ని తెలుపుము మాకున్. 16

ఒడ్డు మాడలు ౫౬౭౬, **జనులు** ౧౨, **పాలు** ౪౭౩.

ఋతు–6, నగ–7, ఋతు–6, శర–5, గనక భాజ్యసంఖ్య=5676 భాజకసంఖ్య=12, భాగఫలం=5676÷12=473.

క. యుగరసరసనిధిసంఖ్యలఁ
దగుధన మెనమండ్రు గొన్నఁ దజ్జనములలో
నొగి నొకనిభాగ మెంతయొ
పొగ డొందగ మాకుఁ జెప్పు భూరివివేకా. 17

ఒడ్డు మాడలు ౯౬౬౪, **జనులు** ౮, **లబ్ధం** ౧౨౦౮.

యుగ–4, రస–6, రస–6, నిధి–9, కాబట్టి భాస్యసంఖ్య=9664, భాజకసంఖ్య=8, భాగఫలం=9664÷8=1208.

గీ. శశికరాగ్ని వేదశరశాస్త్ర మునివసు
రంధ్ర నాగశైల రసశరాబ్ధి
రామబాహుచంద్ర హేమంబు శశికరిఁ
బాలుగొన్న సంఖ్యభాగ మెంత. 18

ఒడ్డు మాడలు ౧౨౩౪౫౬౭౮౯౮౭౬౫౪౩౨౧ , **జనం** ౮౧, **భాగాలు** ౧౫౨౮౧౫౭౮౮౯౭౧౦౪౧.

శశి–1, కర–2, అగ్ని–3, వేద–4, శర–5, శాస్త్ర–6, ముని–7, వసు–8, రంధ్ర–9, నాగ–8, శైల–7, రస–6, శర–5, అబ్ధి–4, రామ–3, బాహు–2, చంద్ర–1లతో ఏర్పడే

భాజ్యసంఖ్య=12345678987654321

భాజకసంఖ్య: శశి–1, కరి–8, కాబట్టి 81

భాగఫలం=12345678987654321÷81=152815788971041.

మత్తకోకిల:

రామచంద్రులు రామబాహులు రామరాములు రంగుగా
రామవార్ధులు రామసాయక రామతర్కములున్ దగన్
రామభూధర రామసామజ రామపద్మజరాసులున్
ధామవైఖరి ముప్పదేడిట దండిఁబాలిడి చెప్పుమా. 19

ఒడ్డు ౧౧౧ । ౨౨౨। ౩౩౩। ౪౪౪। ౫౫౫। ౬౬౬। ౭౭౭। ౮౮౮। ౯౯౯।,
భాగం ౩౭, లబ్ధం ౩ । ౬ । ౯ । ౧౨ । ౧౫ । ౧౮ । ౨౧ । ౨౪ । ౨౭.
ఒక్కొక్క పదానికి ప్రత్యేక పదాలుగా కానవలయును.

ఇది ఒక విలక్షణమైన సమస్య, భాజ్యసంఖ్యలను పేర్కొన్నవిధం విలక్షణంగా ఉంది.

రామ, చంద్రులు – మూడు ఒకట్లు – 111 ఒకభాజ్యసంఖ్య
రామ, బాహులు – మూడురెండ్లు – 222 రెండో భాజ్యసంఖ్య
రామ, దాములు – మూడుముళ్లు – 333 మూడో భాజ్యసంఖ్య
రామ, వార్ధులు – మూడు నాలుగులు – 444 నాలుగో భాజ్యసంఖ్య
రామసాయక – మూడుఐదులు – 555 ఐదో భాజ్యసంఖ్య
రామతర్కములు – మూడు ఆర్లు – 666 ఆరో భాజ్యసంఖ్య
రామభూధర – మూడు ఏళ్ళు – 777 ఏడో భాజ్యసంఖ్య
రామసామజ – మూడు ఎనిమిదులు – 888 ఎనిమిదో భాజ్యసంఖ్య
రామపద్మజ – మూడు తొమ్మిదులు – 999 తొమ్మిదో భాజ్యసంఖ్య

ఈ తొమ్మిది సంఖ్యలను 37తో భాగించవలె తొమ్మిది భాగఫలాలు

111÷37 = 3
222÷37= 6
333÷37= 9
444÷37= 12
555÷37= 15
666÷37= 18
777÷37= 21
888÷37= 24
999÷37= 27.

మత్తకోకిల:

వార్ధిసోములు వార్ధిబాహులు వార్ధిరాములు వార్ధులున్
వార్ధిసంఖ్యల వార్ధిసాయక వార్ధితర్కవితానముల్
వార్ధిభూధర వార్ధిసామజ వార్ధిపద్మజరాసులున్
వర్ధమానుఁడ నూటనొక్కట వానిఁ బాల్గొని చెప్పుమా. 20

ఒడ్డు ౧౧౧౧ । ౨౨౨౨ । ౩౩౩౩ । ౪౪౪౪ । ౫౫౫౫ । ౬౬౬౬ । ౭౭౭౭। ౮౮౮౮ । ౯౯౯౯ । **భాగం** ౧౦౧, **లబ్ధం** ౧౧ । ౨౨ । ౩౩ । ౪౪ । ౫౫ । ౬౬ । ౭౭ । ౮౮ । ౯౯.

వార్ధి సోములు – నాలుగు ఒకట్లు – 1111
వార్ధి బాహులు – నాలుగు రెండ్లు – 2222
వార్ధి రాములు – నాలుగు మూళ్లు – 3333
వార్ధి వార్ధులు – నాలుగు నాలుగులు – 4444
వార్ధి సాయక – నాలుగైదులు – 5555
వార్ధి తర్కములు – నాలుగు ఆర్లు – 6666
వార్ధి భూధర – నాలుగు ఏళ్ళు – 7777
వార్ధి సామజ – నాలుగు ఎనిమిదులు – 8888
వార్ధి పద్మజ – నాలుగు తొమ్మిదులు – 9999

ఈ తొమ్మిది సంఖ్యలను, తొమ్మిది భాజ్యాలుగా తీసికొని భాజకం....101గా భాగిస్తే, వరుసగా భాగఫలాలు

1111÷101= 11
2222÷101= 22
3333÷101= 33
4444÷101= 44
5555÷101= 55
6666÷101= 66

7777÷101= 77

8888÷101= 88

9999÷101= 99.

మత్తకోకిల:

బాణచంద్రులు బాణబాహులు బాణరాములు నచ్చుగన్
బాణవార్ధులు బాణసాయకబాణతర్కవితానముల్
బాణపర్వతబాణసామజబాణరంధ్రము లర్థితో
బాణరాయఁడ నల్బదొక్కటఁ బాలుగాఁ గొని చెప్పుమా. 21

ఒద్దు ౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯, **భాగం** ౪౧, **లబ్ధాలు** ౨౭౧ । ౫౪౨ । ౮౧౩ । ౧౦౮౪ । ౧౩౫౫ । ౧౬౨౬ । ౧౮౯౩ । ౨౧౬౮ । ౨౪౩౯.

బాణ–5, చంద్రులు–1

బాణచంద్రులు – ఐదు ఒకట్లు – 11111

బాణబాహులు – ఐదు రెండ్లు – 22222

బాణరాహులు – ఐదు మూళ్ళు – 33333

బాణవార్ధులు – ఐదు నాలుగులు – 44444

బాణసాయక – ఐదు ఐదులు – 55555

బాణ తర్క – ఐదు ఆర్లు – 66666

బాణ పర్వత – ఐదుఏళ్ళు – 77777

బాణసామజ – ఐదు ఎనిమిదులు – 88888

బాణరంధ్రము – ఐదుతొమ్మిదులు – 99999

ఈ తొమ్మిది సంఖ్యలను వరుసక్రమంలో నుంచి 41తో భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలాలు:

11111÷41= 271

22222÷41= 542

33333÷41= 813

44444÷41= 1084

55555÷41= 1355

66666÷41= 1626

77777÷41= 1893

88888÷41= 2168

99999÷41= 2439.

మత్తకోకిల:

తర్కసోములు దర్కబాహులు దర్కరాములు నబ్ధులున్
దర్కసంఖ్యలఁ దర్కసాయకతర్కతర్కవితానముల్
తర్కభూధరతర్కదంతులు దర్కపద్మజరాసులున్
అర్కభోజుఁడ శైలరాముల నారఁ బాల్గొని చెప్పుమా. 22

ఒద్దు ౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯, **భాగం** ౩౭, **లబ్ధాలు** ౩౦౦౩ । ౬౦౦౬ । ౯౦౦౯ । ౧౨౦౦౧౨ । ౧౫౦౦౧౫ । ౧౮౦౦౧౮ । ౨౧౦౦౨౧ । ౨౪౦౦౨౪.

తర్క–6, సోము–1, తర్కసోములు– ఆరు ఒకట్లు....ఇట్లా ఏర్పడిన తొమ్మిది ఆరు అంకెల సంఖ్యలను భాగించే సంఖ్య శైల–7, రాముల–3 అంటే 37 భాజకం.

తర్కసోములు – ఆరుఒకట్లు – 111111 కాబట్టి 111111÷37=3003

తర్కబాహులు – ఆరురెండ్లు – 222222 కాబట్టి 222222÷37=6006

తర్కరాములు– ఆరుమూళ్ళు – 333333 కాబట్టి 333333÷37=9009

తర్కఅబ్ధులు – ఆరునాల్గులు – 444444 కాబట్టి 444444÷37=120012

తర్కసాయక – ఆరుఐదులు – 555555 కాబట్టి 555555÷37=150015

తర్కతర్క - ఆరు ఆర్లు - 666666 కాబట్టి 666666÷37=180018

తర్కభూధర-ఆరు ఏళ్ళు- 777777 కాబట్టి 777777÷37=210021

తర్కదంతులు-ఆరు ఎనిమిదులు-888888 కాబట్టి 888888÷37=240024

తర్కపద్మజ-ఆరు తొమ్మిదులు-999999 కాబట్టి 999999÷37=270027

మత్తకోకిల

శైలచంద్రులు శైలబాహులు శైలరాములు వేదముల్
శైలసంఖ్యలు శైలసాయక శైలతర్కవితానముల్
శైలభూధరశైలదంతులు శైలపద్మజరాసులున్
జాలఁబద్మజలోకలోచనసంఖ్యఁ బాల్గొని చెప్పుమా. 23

ఒడ్డు ౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯, **భాగం** ౨౩౯, **లబ్ధాలు** ౪౬౪౯ । ౯౨౯౮ । ౧౩౯౪౭ । ౧౮౫౯౬ । ౨౩౨౪౫ । ౨౭౪౯౪ । ౩౨౫౪౩ । ౩౭౧౫౨ । ౪౧౮౪౧.

శైల-7, చంద్ర-1. కాబట్టి శైలచంద్రులు= ఏడు ఒకట్లు, ఇది మొదటి భాజ్యసంఖ్య అట్లాగే రెండో భాజ్యసంఖ్య శైలబాహులు - ఏడురెండ్లు

మూడవది శైలరాములు అంటే ఏడు మూళ్ళు
నాల్గవది శైలవేదములు అంటే ఏడునాలుగులు
ఐదవది శైలసాయక అంటే ఏడు ఐదులు
ఆరవది శైలతర్కములు అంటే ఏడు ఆర్లు
ఏడవది శైలభూధరములు అంటే ఏడు ఏళ్ళు
ఎనిమిదవది శైలదంతులు అంటే ఏడు ఎనిమిదిలు
తొమ్మిదవది శైలపద్మజలు అంటే ఏడు తొమ్మిదులు.

ఇప్పుడు భాజకం: పద్మజ-9, లోక-3, లోచన-2, అంటే 239.

భాగఫలాలు

1111111÷239= 4649

2222222÷239= 9298

3333333÷239=13947

4444444÷239=18596

5555555÷239=23245

6666666÷239=27494

7777777÷239=32543

8888888÷239=37152

9999999÷239=41841.

మత్తకోకిల:

అష్టచంద్రులు నష్టబాహులు నష్టరాములు నంబుధుల్
అష్టసంఖ్యను నష్టబాణము లష్టశాస్త్రవితానముల్
అష్టశైలము లష్టహస్తులు నష్టనందనరాసులున్
సృష్టిలోపలనూటయొక్కటఁ జెప్పు పాల్గొన లబ్ధముల్. 24

ఒడ్డు ౧౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯౯, **భాగం** ౧౦౧, **లబ్ధాలు** ౧౧౦౦౧౧ । ౨౨౦౦౨౨ । ౩౩౦౦౩౩ । ౪౪౦౦౪౪ । ౫౫౦౦౫౫ । ౬౬౦౦౬౬ । ౭౭౦౦౭౭ । ౮౮౦౦౮౮ । ౯౯౦౦౯౯.

ఈ సమస్యలో భాజ్యసంఖ్యలు ఎనిమిది అంకెల సంఖ్యలు. మొదటిది అష్ట-8, చంద్రులు-1 అంటే 11111111-ఎనిమిది ఒకట్లు.

అట్లాగే మిగతాది:

అష్టబాహులు - ఎనిమిది రెండ్లు - 22222222
అష్టరాములు - ఎనిమిది మూళ్ళు - 33333333
అష్ట అంబుధుల్ - ఎనిమిది నాల్గులు - 44444444
అష్ట బాణముల్ - ఎనిమిది ఐదులు - 55555555

అష్ట శాస్త్రములు - ఎనిమిది ఆర్లు - 66666666

అష్టశైలములు - ఎనిమిది ఏళ్ళు - 77777777

అష్టహస్తులు - ఎనిమిదెనిమిదులు - 88888888

అష్ట నందక - ఎనిమిది తొమ్మిదులు - 99999999

ఇది భాజ్యసంఖ్యలు. భాజక సంఖ్య - 101 ఇక భాగఫలాలు -

11111111÷101= 110011

22222222÷101= 220022

33333333÷101= 330033

44444444÷101= 440044

55555555÷101= 550055

66666666÷101= 660066

77777777÷101= 770077

88888888÷101= 880088

99999999÷101= 990099.

మత్తకోకిల:

బ్రహ్మసోములుబ్రహ్మబాహులుబ్రహ్మరాములు వార్ధులున్
బ్రహ్మసంఖ్యను బ్రహ్మసాయక బ్రహ్మతర్కవితానముల్
బ్రహ్మభూధరబ్రహ్మవారణబ్రహ్మపద్మరాసులున్
బ్రాహ్మణోత్తమ ముప్పదేడిటఁ బాలుగొన్నది చెప్పుమా 25

ఒడ్డు ౧౧౧౧౧౧౧౧౧ । ౨౨౨౨౨౨౨౨౨ । ౩౩౩౩౩౩౩౩౩ । ౪౪౪౪౪౪౪౪౪ । ౫౫౫౫౫౫౫౫౫ । ౬౬౬౬౬౬౬౬౬ । ౭౭౭౭౭౭౭౭౭ । ౮౮౮౮౮౮౮౮౮ । ౯౯౯౯౯౯౯౯౯, **భాగం** ౩౭, **లబ్ధాలు** ౩౦౦౩౦౦౩ । ౬౦౦౬౦౦౬ । ౯౦౦౯౦౦౯ । ౧౨౦౧౨౦౧౨ । ౧౫౦౧౫౦౧౫ । ౧౮౦౧౮౦౧౮ । ౨౧౦౨౧౦౨౧ । ౨౪౦౨౪౦౨౪ । ౨౭౦౨౭౦౨౭ ।

ఈ సమస్యలో భాజ్యసంఖ్యలు తొమ్మిది అంకెల సంఖ్యలు మొదటిది బ్రహ్మ-9, సోములు-1, అంటే తొమ్మిది ఒకట్లు-111111111

రెండోది బ్రహ్మబాహులు - 222222222

మూడవది బ్రహ్మరాములు - 333333333

నాల్గవది బ్రహ్మవార్ధులు - 444444444

ఐదవది బ్రహ్మసాయక - 555555555

ఆరవది బ్రహ్మతర్కాలు - 666666666

ఏడవది బ్రహ్మభూధర - 777777777

ఎనిమిదవది బ్రహ్మవారణములు - 888888888

తొమ్మిదవది బ్రహ్మపద్మరాసులు - 999999999

వీటిని భాజక సంఖ్య 37తో భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలాలు:

111111111÷37= 3003003

222222222÷37= 6006006

333333333÷37= 9009009

444444444÷37= 12012012

555555555÷37= 15015015

666666666÷37= 18018018

777777777÷37= 21021021

888888888÷37= 24024024

999999999÷37= 27027027.

చ. **హిమకరబాహుబాణములు నీశ్వరుకన్నులు పంచరత్నముల్**
అమరఁగఁ జంద్రరుద్రులును నందముగా నిడి పాలుగొన్నవాఁ
దమృతశరీరి బ్రహ్మహరియాదిగవేల్పులుఁ గాతు రెప్పుడున్
రమణను నేర్పరింపు మతి రాజులు మెచ్చగ మంత్రిశేఖరా. 26

హిమకర–1, బాహు–2, బాణ–5, ఈశ్వరుకన్నులు–3, పంచరత్నముల్ (?)–5, చంద్ర–1, రుద్రులు–11, వీటితో ఏర్పడే సంఖ్య–11153521 దీనిని భాజ్యసంఖ్యగా, దిగువ మరోపద్యంలో సూచించినది భాజక సంఖ్యగా తీసుకోవాలి.

ఇందుకు సూత్రం

క. పుడమిని ముప్పైయొక్కటి
యెడపక తెగc బాలుగొన్న నెన్నికతోడన్
విడువక తెగ హరియించిన
కడపట ముక్కయ్యె నొద్దు క్రమమునవచ్చున్. 27

ఒడ్డు ౧౧౧౫౩౫౨౧, **భాగం** ౩౧, **లబ్ధం** ౩౫౯౭౯౧.

పైపద్యంలో ఇచ్చిన భాజ్యసంఖ్యను 31తో భాగిస్తే
భాగఫలం: 11153521÷31=359791
గమనిక: పై రెండుపద్యాలలో శైలి, సమస్యనిచ్చినతీరు మల్లన పద్ధతికి విరుద్ధంగా ఉన్నందువల్ల, బహుశః ఇవి ప్రక్షిప్తాలేమోనని ఒక అభిప్రాయం ఉన్నది.

గీ. చంద్రబాణశరము సరసంబుగా నిడి
పాలుగొన్న దానc బ్రజ్ఞ మెఱసి
బ్రహ్మచంద్రులంత బ్రాcతిగా నాయువు
నెలమితోడ నిత్తు రింపుమిగుల. 28

ఒడ్డు ౫౫౧, **భాగం** ౧౯, **లబ్ధం** ౨౯.

చంద్ర–1, బాణ–5, శరము–5, భాజ్యసంఖ్య 551 భాజకం: బ్రహ్మ–9, చంద్ర–1 అంటే 19 భాగఫలం=551÷19=29.

గీ. రామశైలసోమరత్నాకరంబులు
బ్రాcతితోడ నెత్తి పాలుగొనcగ
నందలంబు గొడుగు నశ్వంబు నిడి పుడ
మీశ్వరుండు భూమి లేలc బంపు. 29

రామ–3, శైల–7, సోమ–1, రత్నాకరంబు–4, భాజ్యసంఖ్య= 4173

భాజకసంఖ్య: అందలంబు–1, గొడుగు–1, అశ్వంబ–1, కాబట్టి 3 (మూడు విడివిడిగా తీసుకొన్నాడు)

భాగఫలం: 4173÷3= 1391.

"4173లో భాగాలు చేస్తే, రాజు వైభవంగా అధికారం కట్టబెడతాడు – 4173= 3×13×107 మూడు కారణాంకాలు అభేద్యాంకాలే" (మనోరంజనీ వ్యాఖ్య).

గీ. అయిదు రెండ్లు పెట్టి యమరంగ నొకటిడి
పాలుగొనుc దటంచుc బలికిరేని
నొకదినంబు కడగ నొకయేcడు షరతిస్తి
గణిత మెఱిcగినట్టి కరణములకు. 30

ఐదు రెండ్లు పెట్టి అమరంగ నొకటిడితే ఏర్పడే సంఖ్య 222221. ఇది భాజ్యసంఖ్యగా తీసుకొందాం. భాజకం సంగతి స్పష్టంగా లేదు.

ఒకదినంబు కడగ నొక యేడు షరతిస్తి
గణితమెరిగి నట్టి కరణములకు"

అనడంలో భాజకం ఏమిటని తెలుసుకోవాలి. తెలుగు నాటకాలగమనం చాంద్రమానం ప్రకారం కొనసాగుతుంది గదా. చాంద్రమానంలో సంవత్సరానికి 360 రోజులు. ఒక్కరోజు తక్కువగా తీసుకుంటే 359. దీన్ని భాజకంగా తీసుకొందాం.

భాగఫలం=222221÷359=619 లభిస్తుంది.

ఈ సమస్యలో ఒక విశేషం ఉంది. భాజకం, భాగఫలం రెండూ ప్రధానసంఖ్యలు. మల్లన కాలంలో ప్రధానసంఖ్యల భావన లేదు. మల్లనకు ప్రధాన సంఖ్యలను గురించిన భావన ఉండెనేమో అనుకొంటే ఆయన

పాండిత్యానికది మరో కళాంశం. అయితే షరతు అన్న అన్యదేశీయ పదం మల్లనకాలంలో వాడుకలో లేదు. కాబట్టి ఈ పద్యం ప్రక్షిప్తమేమో! ఈ సమస్యలో 222221కి ప్రధానసంఖ్యా కారణాంకాలు 359, 619.

గీ. ఏడువరసలెక్క యేపారఁగాఁ బెట్టి
క్రిందచంద్రనేత్రగిరుల నిలిపి
తొమ్మిదేడు రెండు తుద నొక్కటైనను
పాలుగొనఁగవలయుఁ బ్రజ్ఞమెఱసి. 31

ఏడువరసలెక్కయేపారగాఁ బెట్టి, అనగా, భాజ్యసంఖ్య 1234567

భాజకం: చంద్ర–1, నేత్ర–2, గిరుల–7 అంటే 721 కానీ ఈ భాగహారం కొనసాగదు. ప్రత్యామ్నాయంగా భాజకం 127గా పరిగణిస్తే ఈ భాగఫలం= 1234567÷127=9721. ఈ భాగఫలాన్ని మల్లన పద్యంలోనే ప్రకటించాడు పరోక్షంగా పద్యం మూడోపాదంలో ఉన్నది ఈ ప్రకటన. తొమ్మిది, ఏడు, రెండు, తుదనొక్కటి అన్నది.

గమనిక: ఇక్కడ చివరి ఆరుపద్యాలు ప్రక్షిప్తాలై ఉండవచ్చు.

ఇది శ్రీ...సార సంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందుఁ

ద్వితీయ పరికర్మగణితము భాగహారము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

పరికర్మగణితము

వర్గు

వ. [1]అందుద్వితీయ (పరికర్మంబైన) భాగహారంబు చెప్పిన తదనంతరంబు దృతీయ (పరికర్మంబైన) వర్గు సెప్పెద నది యెట్టిదనిన;

రెండవ భాగమైన భాగహారం చెప్పిన పిదప, మూడవ పరిచ్ఛేదమైన వర్గును గురించి చెప్పెదను.

క. [2]కడ యంకము వర్గువు గొని
విడునక రెట్టించి శేషవివిధాంకములన్
నడపి గుణియించి వెండియు
నుడుగక యిప్పాట వర్గు వూహింపఁదగున్. 1

వర్గుగణన సూత్రంలో స్పష్టతలేదు. అసమగ్రంగా ఉన్నది. బహుశః $(a+b+c)^2= a^2+b^2+c^2+....2ab+2bc+2ca...$అన్న విస్తరణమీద ఆధారపడిన పద్ధతి అనిపిస్తుంది.

బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారిచే పరిశోధింపబడిన ప్రతిలో పుట 45లో ఈ పద్యం తాలూకు వ్యాఖ్యానభాగంలో "ఇట సంస్కృత మూలమునగల శ్లోకములకు దెలుగు గానరాదు" అని ఉన్నది – చూడండి.

ఒక సంఖ్యను వర్గం గణించడంకోసం కొంత గణనం చేయాలి. సంఖ్య, రెండంకెలదైనప్పుడు ఒక పద్ధతి, మూడంకెలదైనప్పుడు ఒకపద్ధతి, ఒకట్లస్థానంలో 5 ఉంటే అప్పుడెట్లా చేయాలి... ఈ విధంగా వివిధ

(1) అందు తృతీయ పరికర్మమున వర్గకరణ మాత్రం బెట్టిదనిన;
(2) ఇట సంస్కృతమూలమునఁగల 'రెండు శ్లోకములకుఁదెలుఁగు గానరాదు.

పద్ధతులున్నాయి. వీటినన్నిటిని ఒక కందపద్యం మూడు పాదాలలో చెప్పడం వీలుకాదు. కనుకనే స్పష్టతలోపించి, అసమగ్రంగా ఉన్నదీ పద్యం.

క. ఒక్కటి మొదలుగఁ గలిగిన
లెక్కలు నవసంఖ్య దాఁక లెక్కించి ముదం
బెక్కఁగ వర్గించిన నం
దొక్కనికిని వర్గపాళ మొగి నెంతయగున్.[1] **2**

ఒకటినుండి తొమ్మిదివరకు అంకెలను వర్గాలు కట్టి ఈ క్రింది విధంగా పట్టికలో అమర్చితే:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

గమనిక: ఇది వర్గాల ఎక్కంలాంటిది. ఎక్కాలు కంఠస్థం చేసినట్లు, వర్గాలను కూడా కంఠస్థం చేస్తే మంచిది.

---

(1)

౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౦	వర్గ
౧	౪	౯	౧౬	౨౫	౩౬	౪౯	౬౪	౮౧	౦	

ఇందుకు మగ్గ :

ఎక్కసవర్గో ఎక్క, బియ్యసవర్గో చారి, తియ్యసవర్గో నవ్వా, చారిసవర్గోషోళా, పంచసవర్గో పణు(పంచా)వీసా, ఛాయస(ఛాన్నస)వర్గో చత్రీసా, సత్తసవర్గో, నవ్వేతాళా (నవతాళ), అట్టసవర్గో చౌషష్టి, నవ్వసవర్గో ఏకాశీతి, సున్న సవర్గోసున్నా.

ఇందుకు తెలుఁగు పలుకుబళ్లు : (ఇవి క్రొత్తగా మేము చేర్చినవి.)

ఒకటివర్గువు ఒకటి, రెండువర్గువు నాలుగు, మూడువర్గువు తొమ్మిది, నాలుగువర్గువు పదహారు, ఇదువర్గువు ఇరవై అయిదు, ఆఱువర్గువు ముప్పైయాఱు, ఏడువర్గువు నలభైతొమ్మిది, ఎనిమిదివర్గువు అఱవైనాలుగు, తొమ్మిదివర్గువు ఎనభైఒకటి, సున్నవర్గువు సున్న.

ఈ మగ్గలోవున్న లెక్కల లక్షణము : మీదిలెక్క యేలెక్కో ఆ లెక్క క్రింద వున్న లెక్కలవెంబడిని గుణిస్తేను వచ్చినలబ్ధం క్రిందిలెక్కలు.

క. పదియేను నిర్వదేనును
బదియాఱును ముప్పదాఱుఁ బంచోత్తర స
ప్తదశకము వేఱువేఱను
గదియఁగ వర్గించి చెప్పు గణితవిధిజ్ఞా. **3**

దీనిఒడ్డు ౧౫ । ౨౫ । ౧౬ । ౩౬ । ౭౫.

వర్గలబ్ధాలు ౨౨౫ । ౬౨౫ । ౨౫౬ । ౧౨౯౬ । ౫౬౨౫.

15, 25, 16, 36, 75 అనే సంఖ్యల వర్గాలు చెప్పండి. అవి 225, 625, 256, 1296, 5625 .... ఇది మూలంలో లేదు. మల్లన స్వయంగా ఇచ్చిన సమస్య.

క. వసురామలోకసంఖ్యయు
రసశరనయనములు చంద్రరసరసగతులున్
బొసఁగఁగఁబ్రత్యేకంబిడి
విసువక వర్గించి చెప్పు విబుధవరేణ్యా. **4**

దీనిఒడ్డు ౩౩౮ । ౨౫౬ । ౪౬౬౧.

వర్గలబ్ధాలు ౧౧౪౨౪౪ । ౬౫౫౩౬ । ౨౧౭౨౪౯౨౧.

వసు–8, రామ–3, లోక–3, సంఖ్య అంటే 338. రస–6, శర–5, నయన–2, సంఖ్య అంటే 256 చంద్ర–1, రస–6, రస–6, గతి–4, సంఖ్య అంటే 4661. ఈ సంఖ్యలను వర్గిస్తే, లభించే ఫలితాలు

$338^2 = 114244$

$256^2 = 65536$

$4661^2 = 21724921$.

గీ. రసగుణేషుబాణరససంఖ్యయును మతి
బాణ వేదవహ్ని పక్ష శశియు
వేఱు వేఱుగాఁగ వెలయంగ వర్గించి
లబ్ధ మెఱుఁగఁ జెప్పు లలితముగను. **5**

దీనిఒడ్డు ౬౫౫౩౬ । ౧౨౩౪౫

వర్గలబ్ధాలు ౪౨౯౪౯౬౭౨౯౬ । ౧౫౨౩౯౯౦౨౫.

రస-6, గుణ-3, ఇషు-5, బాణ-5, రస-6, ఈ సంఖ్య 65536. బాణ-5, వేద-4, వహ్ని-3, పక్ష-2, శశి-1 ఈ సంఖ్య 12345 వీటి వర్గలబ్ధాలు:

$65536^2 = 4294967296$

$12345^2 = 152399025$.

గీ. మూఁడు వేలమీఁద మున్నూఁట ముప్పది
మూఁడు కలయఁగూడి ముదము తోడ
వాని నిల్పి మఱియు వర్గించి కైకొన్న
ఫలము చెప్పు మాకు వెలయ గణక. 6

దీనిఒడ్డు ౩౩౩౩

వర్గలబ్ధం ౧౧౧౦౮౮౮౯.

సంఖ్య: 3333

వర్గం : $3333^2 = 11108889$.

క. గిరినాగగుణరసంబులు
శరగుణశశిశైలములను చక్షుఃపక్షాం
బరచంద్రులఁ బ్రత్యేకము
[1]వరుసన్ దగ నిల్పి చెప్పు వర్గువు లబ్ధిన్. 7

ఈ పద్యంలో మూడు సంఖ్యలున్నాయి. గిరి-7, నాగ-8, గుణ-3, రస-6 అంటే 6387 ఒక సంఖ్య శర-5, గుణ-3, శశి-1, శైల-7 అంటే 7135 రెండవది చక్షు-2, పక్ష-2, అంబర-0, చంద్ర-1 అంటే 1022 మూడవది ఈ మూడు సంఖ్యల వర్గలబ్ధాలు.

(1) వరుస నిలిపి చెప్పు నాకు వర్గువు జగతిన్

$6387^2 = 40793769$

$7135^2 = 50908225$

$1022^2 = 1044484$.

లేదా అన్ని సంకేతాలను వరుసగా తీసుకుంటే ఏర్పడే సంఖ్య 102271356387. దీనిని వర్గిస్తే

$102271356387^2 = 102271356387 \times 102271356387$

```
           = 715899494709
            818170851096
           306814069161
          613628138322
         511356781935
        306814069161
       102271356387
      715899494709
     204542712774
    204542712774
   102271356387
-------------------------
   10459430337236765693769
-------------------------
```

ఇది శ్రీ...సారసంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందుఁ దృతీయ పరికర్మగణితము వర్గువు సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

పరికర్మగణితము

వర్గమూలము

వ. [1]అందుఁదృతీయ పరికర్మంబై వర్గువు చెప్పిన (వర్గుపరికర్మంబు చెప్పిన) తదనంతరంబు చతుర్థ (పరికర్మంబైన) వర్గమూలంబు చెప్పెదనది యెట్టిదనిన;

మూడవ పరిచ్ఛేదంలో వర్గించడం చెప్పిన తరువాత నాల్గవప్రక్రియ వర్గమూలం గురించి చెబుతాను.

క. చను వర్గు మూల మోజం
గొని తద్ద్విగుణమునఁ బాలుగొని యుగ్మము[2] దా
నిని గడపటి కృతిమూలము
గొని తద్ద్విగుణార్ధఫలము గొన మూలమగున్.* 1

ఈ పద్యంలో వర్గమూలం కనుక్కోవడానికి సూత్రం చెప్పడం జరిగింది. "ఒక చిన్న పద్యంలో ఎంత బాగా చెప్పినా, కొత్తగా నేర్చుకొనేవారికి సూత్రవిషయం అంతుపట్టదు." కాబట్టి వివరణలో స్పష్టతలేదు. రెండు సమాన సంఖ్యలను ద్విగుణం చేయగా వర్గం ఏర్పడితే దాని విలోమప్రక్రియ ద్వారా వర్గమూలాన్ని కనుక్కొంటాము.

(1) అందుఁజతుర్థ పరికర్మంబైన వర్గమూలమునకుఁ గరణసూత్రం బెట్టిదనిన.
(2) పైకొని, గైకొని, డాసిన

(*) వర్గుమూలము గోనేటందుకు స్థానసూత్రానకు సంజ్ఞలు. ఓజ–యుగ్మ । అన్నందుకు లెక్క సంజ్ఞలు. ఒడ్డు తుదలెక్క పేరు ఓజ అని అడ్డగీటుగీచేది. దాని దిగువ లెక్క పేరు యుగ్మ అని నిడుపుగీటుగీచేది ఎన్ని ఎక్కలకు అయినా తుదలెక్కనుంచి మొదటికి యీలాగే కనక యెఱిఁగేది.

ఉదా: 5×5= 25 వర్గసంఖ్య, ఇది అనులోమ ప్రక్రియ – దీనికి విలోమ ప్రక్రియ 25 యొక్కవర్గమూలం= 25=5 అన్నది. ఇక్కడ 25ను ఓజ అని, 5ను యుగ్మమని సంకేతించడం జరిగింది.

"యుగ్మము యొక్క ద్విగుణార్ధఫలం మూలం" వర్గాన్ని కృతి అనడం, వర్గమూలాన్ని కృతిమూలం అనడం కూడా కద్దు.

గమనిక: వర్గమూలం కట్టడానికి, సంఖ్యలోని స్థానాలను కుడినుండి బేసి, (విషమ), సరి (సమ)స్థానాలుగా గుర్తించడం పూర్వ సంప్రదాయం. బేసి స్థానాలపై నిలువు గీటు. సరిస్థానాలపై అడ్డగీత రాసుకోవడం ఈ సంప్రదాయంలో భాగమే.

క. [3]ఏకాది నవాంతముగా
నేకై కాంకముల వర్గు వెఱిఁగి ముదమునం

(3) నేకానీకముల

౧	౪	౯	౧౬	౨౫	౩౬	౪౯	౬౪	౮౧	౦	వర్గ మూలము
౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౦	

వర్గుమూలపుమగ్గ (ప్రాకృతము)

ఎక్కసవర్గోమూలో ఎక్కా, చారిసవర్గోమూలో బిన్ని, నవ్వసవర్గోమూలో తిన్ని, పోళసవర్గోమూలో చారి, పణ్ణిసవర్గోమూలో పంచ, ఛత్తిసవర్గోమూలో చాహో, నవ్వేతాళసవర్గోమూలో సత్త, చౌసష్టిసవర్గోమూలో అట్ట, ఏకాసీతి సవర్గోమూలో నన్న, సున్నసవర్గోమూలో సున్న .

ఇందుకు తెలుఁగు పలుకుబళ్లు :

ఒక్కటి వర్గువుమూలం ఒకటి, నాలుగు వర్గువుమూలం రెండు, తొమ్మిది వర్గువుమూలం మూడు, పదాఱు వర్గువుమూలం నాలుగు, ఇర్వైఐదు వర్గువుమూలం ఐదు, ముప్పైయాఱు వర్గువుమూలం ఆఱు, నలభైతొమ్మిది వర్గువుమూలం ఏడు, అర్వైనాలుగు వర్గువుమూలం ఎన్మిది, తొంబైయొక్కటి వర్గువుమూలం తొమ్మిది, సున్న వరువుమూలం సున్నా.

జేకొని మూలము చేసినఁ

బ్రాకటముగ మూలపాఠ ఫల మెంతయగున్. 2

ఒకటినుండి తొమ్మిదివరకు గల అంకెల వర్గాలను రాసి వాటికింద వాటి మూలాలను రాసి చూచినప్పుడు వర్గమూల పాఠఫలము తెలుసుకోవచ్చు.

1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	3	4	5	6	7	8	9

క. రసరామబాణసాయక

రసములు శశితర్క బాణరసములు వరుసన్

[1]వసుమతిఁ గృతిమూలముగా

నెసగఁగఁగొని విస్తరింపు మేర్పడ మాకున్. 3

ఒడ్లు ౬౫౫౩౬ ౬౫౬౧

లబ్ధాలు ౨౫౬ ౮౧.

రస–6, రామ–3, బాణ–5, సాయక–5, రస–6, ఇంతవరకు ఒకసంఖ్యగా–అంటే 65536నకు వర్గమూలం కనుక్కోవాలి–$\sqrt{65536}=256$ అట్లాగే రెండో సంఖ్య: శశి–1, తర్క–6, బాణ–5, రసములు–6 అంటే 6561 దీని వర్గమూలం కనుక్కోవాలి–$\sqrt{6561}=81$.

ఆ. రసనవాక్షి శైలరసరంధ్రగతినిధి

నయనవేదములకు నయముతోడ

శీతకిరణ నయనభూతాక్షిబాహుర

సముల కయిన మూల సమితి యెంత. 4

ఒడ్లు ౪౨౯౪౯౬౭౨౯౬ ౬౨౨౫౨౧

లబ్ధాలు ౬౫౫౩౬ ౭౮౯.

(1) వసుమతినివి గృతిమూలం బెసగఁగ,

రస–6, నవ–9, అక్షి–2, శైల–7, రస–6, రంధ్ర–9, గతి–4, నిధి–9, నయన–2, వేదము–4, ఇట్లా ఏర్పడిన సంఖ్య – 4294967296

దీని వర్గమూలం అంటే $\sqrt{4294967296} = 65536$.

అట్లాగే మరోసంఖ్య:

శీతకిరణ=1, నయన–2, భూత–5, అక్షి–2, బాహు–2, రస–6 ఈ సంఖ్య 622521. దీని వగ్గమూలం $\sqrt{622521}= 789$.

ఆ. శశివయోధివేదజలనిధి రసతర్క

[1]గుణరసంబులకును గొమరుగాఁగ

శశిరసేషుసోమశైలతురంగమ

దంద్రులకును మూలసమితి యెంత. 5

ఒడ్లు ౬౩౬౬౪౪౪౧ ౧౭౭౧౫౬౧

లబ్ధాలు ౭౯౭౯ ౧౩౩౧.

శశి–1, పయోధి–4, వేద–4, జలనిధి–4, రస–6, తర్క–6, గుణ–3, రస–6, ఈ సంఖ్య 63664441. దీని వర్గమూలం అంటే $\sqrt{63664441}=$ 7979.

అట్లాగే మరోసంఖ్య:

శశి–1, రస–6, ఇషు–5, సోమ–1, శైల–7, తురంగ–7, చంద్ర–1, ఈ సంఖ్య 1771561 దీని వర్గమూలం $\sqrt{1771561}=1331$.

క. *ఋతునిధినేత్రశశాంకుల

రతిపతిశరములను నేత్రరససంఖ్యలనున్

(1) గుణపదార్థములకు గుఋతు గాఁగ.

(*) ఇది ఒకప్రతిలోఁ దొలి యుదాహరణగా నీయఁబడినది. దానితో నీ క్రిందివివరణమున్నది :

ఇందులకు ఒడ్డు ౧౨౯౬, లబ్ధవర్గమూలము ౩౬. గనక "చనువర్గమూల మోజం గోని" యన్నందుకు యీ రెండోలెక్క ఓజ గనక ఆ లెక్కమీదను తొమ్మిది వేసి

గృతిమూలము గొని యిది స

మ్మతి మా కెఱింగింపు తత్ర్పమాణఫలంబుల్. **6**

ఒడ్లు ౧౨౯౬ ౬౨౫

లబ్ధాలు ౩౬ ౨౫.

ఋతు–6, నిధి–9, నేత్ర–2, శశాంక–1, ఈ సంఖ్య 1296 దీని వర్గమూలం=$\sqrt{1296}$=36 అట్లాగే మరో సంఖ్య: రథిపతిశరము–5, నేత్ర–2, రస–6, ఈ సంఖ్య 625, దీని వర్గమూలం $\sqrt{625}$=25

క. నిధినాగాష్టఖరుద్రులు

విధునయన గుణాక్షిశశులు విధురసభూతాం

బుధిగతి [1]వసువులు మూలము

విధ మిది ఫలితంబు చెప్పు విద్యానిలయా. **7**

ఒడ్లు ౧౧౦౮౮౯ ౧౨౩౨౧ ౮౪౪౫౬౧

లబ్ధాలు ౩౩౩ ౧౧౧ ౯౧౯

నిధి–9, నాగ–8, అష్ట–8, ఖ–0, రుద్ర–11, ఈ సంఖ్య 110889, దీని వర్గమూలం $\sqrt{110889}$=333 రెండో సంఖ్య: విధు–1, నయన–2,

ఆ లెక్కకింద మూడువేసి నవ్వసవర్గోమూలో తిన్ని అని తొమ్మిదింటి చేతను పాలుగొనేది. "ద్విగుణమున బాలుగొని" అన్నందుకు ఆ లబ్ధవర్గుమూలంలోది మొదటిది ౩న్ను ఒడ్డు రెండోలెక్కకింద ఉన్నది గనక ఆలెక్క తియ్యస పదం గత్వా ద్విగుణం ఛాహో అని ఈవలిలెక్క యుగ్మపదం గనక దానికిందికి ఉత్సార్యచేసి ఆఱువేసేది. ఆయాఱు కింద లబ్ధవర్గుమూలంలోని రెండొలెక్క. ౬న్ను వేసి ఛఛక్కం ఛాత్రిసా అని భాగారించి అవి తుడిపి యీలబ్ధమూలంలోది రెండొలెక్క ఆఱున్ను ఒడ్డు నిమకళా లబ్ధం కిందను వేసి ఛత్రీసవర్గోమూలో ఛాహో అని యీ లబ్ధంమీదనువేసి అవి భాగించి అవి తుడిచి ఛాయన పదం గత్వా ద్విగుణం బారా అని పణ్ణెండువేసి మొదటి ఆఱుమీద ఒకటివేసి రెండో ఆఱుపొడిచి ౨ వేసితే ౭౨ గనక సగం చేస్తేను ౩౬ యీలాగున గుణించేది.

1. వసువులఁబెంచిన । విధమెఱుఁగఁగఁ జెప్పు గణితవిద్యానిలయా.

గుణ–3, అక్షి–2, శశి–1, ఈ సంఖ్య: 12321 దీని వర్గమూలం= $\sqrt{12321}$= 111 మూడోసంఖ్య: విధు–1, రస–6, భూత–5, అంబుధి–4, గతి–4, వసు–8. ఈ సంఖ్య: 844561, దీని వర్గమూలం= $\sqrt{844561}$=919.

ఇతి శ్రీ...సారసంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందు జతుర్థ పరికర్మగణితము వర్గుమూలము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

పరికర్మగణితము

ఘనము

వ. [1]అందుఁ జతుర్థ (పరికర్మంబైన) వర్గుమూలంబు చెప్పినతదనంతరంబ పంచమ (పరికర్మంబైన) ఘనము చెప్పుదు నది యెట్టిదనిన;

నాల్గో పరిచ్ఛేదం వర్గమూలాన్ని వివరించిన తరువాత ఐదో పరిచ్ఛేదం ఘనాన్ని గురించి చెప్పడం జరిగింది.

గీ. ఘనము గొని దానివర్గించి యొనర మూఁటఁ
బెఁచి శేషంబుతో గుణియించి శేష
మావలం బెట్టి వర్గించి యాదిహతము
చేసి త్రిగుణించి కూడినఁజేరు ఘనము. 1

ఈ పద్యంలో మల్లన ఘనాన్ని రాబట్టే పద్ధతిని చెప్పాడు. ఘనసఖ్య నొకదాన్ని తీసుకొని, దానిని వర్గించి మూడుతో గుణించి, శేషముతో, గుణించి, శేషమును వదలి, వర్గముచేసి "ఆది సంఖ్యను హతముచేసి, మూడుసార్లు గుణించి కూడినప్పుడు ఘనం వస్తుంది" ఇక్కడ కవిహృదయం తెలియడం లేదు.

క. అమరఁగ నేకాదినవాం
తముగాఁగల [2]లెక్కలను ముదంబునఁ బ్రత్యే
కము ఘనము గొని తదీయ
క్రమపాఠమెఱుంగఁజెప్పు గణితవిధిజ్ఞా.[3] 2

(1) అందు పంచమ పరికర్మంబైన ఘనకరణ సూత్రం బెట్టిదనిన;

(2) లెక్కలిడి.

(3)

౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౦	ఘనం
౧	౮	౨౭	౬౪	౧౨౫	౨౧౬	౩౪౩	౫౧౨	౭౨౯	౦	

ఇందుకు మగ్గ :

ఒకటి నుండి తొమ్మిది వరకుగల అంకెలను ఘనాలను కట్టి ఒక క్రమంతో అమర్చడం – ఇదే క్రమపాఠం చెప్పడం.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

క. [1]పదియేను నిర్వదేన్ ము
ప్పదియాఱును డెబ్బదేనుఁ, బసమీఱఁగఁ దొం
బదియాఱును ననువానికిఁ
గదియఁగ ఘనమెద్ది చెప్పు గణకవరేణ్యా. 3

ఒడ్లు ౧౫ ౨౫ ౩౬ ౭౫ ౯౬

లబ్ధాలు ౩౩౭౫ ౧౫౬౨౫ ౪౬౬౫౬ ౪౨౧౮౭౫ ౮౮౪౭౩౬

ఎక్కసఘన్నో ఎక్కా, బియ్యసఘన్నో అట్టా, తియ్యసఘన్నో సత్తావీసా, చారిసఘన్నో చౌషష్టి, పంచసఘన్నో పనవీసోత్తర ఏకశతం, చాయసఘన్నో షోలోత్తర బిన్నిశతం, సత్తసఘన్నో త్రేతాళోత్తర తిన్నిశతం, అట్టసఘన్నో బిన్ని దశోత్తర (బారాహొత్తర) పంచశతం, నవ్వసఘన్నో నవబిన్నో (విංశో) తర సత్తశతం, సున్నసఘన్నో సున్నా. ఇందుకుఁ దెలుగు పలుకుబళ్లు :

ఒకటి ఘనం ఒకటి, రెండు ఘనం ఎన్మిది, మూడు ఘనం ఇర్వైయేడు, నాలుగు ఘనం అఱువైనాలుగు, అయిదు ఘనం నూట యిర్వై అయిదు, ఆఱుఘనం రెండువందల పదహాఱు, ఏడుఘనం మున్నూటనలభైమూడు, ఎనిమిదిఘనం అయిదువందలపన్నెండు, తొమ్మిదిఘనం ఏడువందల యిర్వైతొమ్మిది, సున్నఘనం సున్న.

ఈ లెక్కల బందుకట్టు: యీమగ్గలోది కడవ్రాసినలెక్క ౯ కనుక యిందుకింద మళ్లా ౯ బెట్టి గుణిస్తేను ౮౧ ఆయను. దీనికిందను తిరిగి ౯ బెట్టి గుణిస్తేను ౭౨౯. యిలా యేలెక్కబెట్టి ఆ లెక్క ౩ రెట్లు గుణిస్తే ఘనం అవును. అంతబెట్టి గుణిస్తే వర్గువు అవును. ఈ బందుకట్టున మగ్గగ్రహించేది.

(1) క. పదియేను నిఱువదేనును। బదియాఱును ముప్పదాఱు పంచోత్తరస
ప్తదశకము వేఱు వేఱన। గదియఁగఁగొనిచెప్పు మఱియు గర్తలఫలముల్

ఒడ్లు ౧౫ ౨౫ ౧౬ ౩౬ ౭౫

లబ్ధాలు ౩౩౭౫ ౧౫౬౨౫ ౪౦౯౬ ౪౬౬౫౬ ౪౨౧౮౭౫

పదునైదు, ఇరవైయైదు, ముప్పైఆరు, డెబ్బైఐదు, తొంబైఆరు వీటిఘనాలు, అంటే 15^3, 25^3, 36^3, 75^3, 96^3 కనుక్కోండి.

$15^3 = 3375$

$25^3 = 15625$

$36^3 = 46656$

$75^3 = 421875$

$96^3 = 884736$

అర్థం లెక్కలకొల్ది....... అడ్డగీట్లు మూడు గీచేది. లెక్కపద్యంలో రెండోఒడ్డు ౨౫. దీనిలబ్ధము ౧౫౬౨౫ గనక 'ఘనముగొని' యున్నందుకు బియ్యసఘన్నో అట్టా అని మూడో వరసన ౮ వేసేది. 'దాని వర్గించి' అన్నందుకు దీని ఒడ్డు మొదలి లెక్క యిపుడు ఘనంచేసిందే. రెండున్ను బియ్యసవర్గో చారి అని రెండోవరసను అయిదింటికిందను నాలుగు వేసేది. 'ఒనర మూఁటఁ బెంచి' అన్నందుకు యీ ౪న్ను మూటను చారి తియ్యంబారా అని గుణించి ఆ ౪న్ను తుడిపి ౧౨ వేసేది. 'శేషంబుతో గుణియించి' అన్నందుకు ౧౨ను మీది అయిదును గుణించేది. ౧౨న్ను ౫న్ను గుణిస్తేను పణ్దెండు అయిదులు ౬౦ వేసి సున్న నాల్గింటికింద వేసేది. ఎన్మిది ఆఱు పద్నాలుగు అని దశస్థానమందు ౧ వేస్తేను ౧౪౦ ఆయెను. 'శేషమవ్వలఁ బ్రతివెట్టి' అన్నందుకు మీది అయిదు ఉత్సార్యచేసి యీవలి యింట్లోకి జరిపేది. 'వర్గించి' అన్నందుకు పంచసవర్గో పణువీసా అని రెండోవరస ౨౫ వేసేది. 'ఆదిహతము చేసి' అన్నంద్కు మొదటిరెండుచేతను ౨౫ గుణిస్తేను ౫౦ వచ్చెను. 'త్రిగుణించి' అన్నందుకు ఆ ౫౦న్ని ౩ గుణిస్తేను ౧౫౦ వచ్చెను. 'కూడినఁజేరు' అన్నంద్కు ౧౫౦ని మూడోవరసను కలియగూడేది. 'ఘనము' అన్నందుకు ఆ ౫న్ను తిరిగి యీవలియింట్కి జరిపేది. పంచసఘన్నోపణువీసోత్తర యక్కశతా అని ౧౨౫ను మూడోవరుసను యెక్కించేది. ఈలబ్ధఘనమూలము ౧౫౬౨౫ ఆయెను.

```
   ౨ ౫ ౫ ౫
 ౧ ౪ ౦
-----------
   ౧ ౫ ౦
-----------
     ౧ ౨ ౫
-----------
 ౧ ౫ ౬ ౨ ౫
```

దీనిలబ్ధం ౧౫౬౨౫.

క. [1]గుణచంద్రకరులఁ దద్ద్వి

గుణమున్ ద్రిణమ్ము మఱియుఁ గూడఁగఁ జాతు

ర్గుణముం బంచగుణమ్మును

గణించి యవ్వాని ఘనము గనుగొను మన్నా. **4**

ఒడ్లు ౨౧౩ ౪౨౬ ౬౩౯ ౮౫౨ ౧౦౬౫

లబ్ధాలు ౯౬౬౩౫౯౭ ౭౭౩౦౮౭౭౬ ౨౬౦౯౧౭౧౧౯ ౬౧౮౪౭౦౨౦౮ ౧౨౦౭౯౪౯౬౨౫.

గుణ–3, చంద్ర–1, కరుల–2 (ఇక్కడ కరులకు బదులు కవి కరములు తీసుకొన్నాడు – కరులైతే 8గా గ్రహించాలి). కాబట్టి కవి భావన ప్రకారం ఈ సంఖ్య 213. తరువాత దీనికి రెట్టింపు – అంటే $213 \times 2 = 426$

మూడురెట్లు – $213 \times 3 = 639$

నాలుగురెట్లు – $213 \times 4 = 852$

ఐదురెట్లు – $213 \times 5 = 1065$

ఈ ఐదు సంఖ్యల ఘనాలు రాయాలి.

$213^3 = 9663597$

$426^3 = 77308776$

$639^3 = 260917119$

$852^3 = 618470208$

$1065^3 = 1207949625$.

పాఠాంతరము.

(1) క. తగగుణశశినయనంబుల

ద్విగుణంబుగఁజేసి మఱియుఁ ద్రిగుణచతుః పం

చగుణంబులు ఘనముగొనఁగ

నగణితముగ వానిఫలము లవియెన్నియగున్.

క. [1]విను నూట యఱువదెనిమిది
యెనిమిది మొదలుగఁ దొణంగి; యేకాంత్యముగాఁ
బెనచిన వానికి నేర్పడ
ఘనసంఖ్య నెఱుంగఁజెప్పు గణిత విధిజ్ఞా. **5**

ఒడ్లు ౧౬౮ ౩౩౬ ౫౦౪ ౬౭౨ ౮౪౦ ౧౦౦౮ ౧౧౭౬ ౧౩౪౪ (౧౫౧౨?)

లబ్ధాలు ౪౭౪౧౬౩౨ ౩౭౯౩౩౦౫౬ ౧౨౮౦౨౪౦౬౪ ౩౦౩౪౬౪౪౪౮ ౫౯౨౭౦౪౦౦౦ ౧౦౨౪౧౯౨౫౧౨ ౧౬౨౬౩౭౯౭౭౬ ౨౪౨౭౭౧౫౫౮౪ (౩౪౫౬౬౪౯౭౨౮?)

168 సంఖ్యను 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9లతో పెంచి ఆ సంఖ్యల ఘనసంఖ్యలను చెప్పండి? అంటే

$168\times1= 168$, $168^3= 4741632$

$168\times2= 336$, $336^3= 37933056$

$168\times3= 504$, $504^3= 128024064$

$168\times4= 672$, $672^3= 303464448$

$168\times5= 840$, $840^3= 592704000$

$168\times6= 1008$, $1008^3= 1024192512$

$168\times7= 1176$, $1176^3= 1626379776$

$168\times8= 1344$, $1344^3= 2427715584$

$168\times9= 1512$, $1512^3= 3456649728$.

క. తోయధిగగనరసాంబర
సాయకరంధ్రప్రమాణసంఖ్యయు ఘనమున్

(1) యెనయఁగ నాదిగను దొడఁగి యేకోత్రముగా.

బాయక తెచ్చిన తత్ఫల
మాయతభుజయుగళ చెప్పు మది యెంతయగున్. **6**

ఒడ్లు ౯౫౦౬౦౪

లబ్ధాలు ౮౫౯౦౧౧౩౬౯౯౪౫౯౪౮౮౬౪.

తోయధి-4, గగన-0, రస-6, అంబర-0, సాయక-5, రంధ్ర-9 అంటే 950604 నకు ఘనం చెప్పండి. 950604^3= 8590113699 45948864.

ఇతి శ్రీ...సార సంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందుఁ పంచమ పరికర్మగణితము ఘనము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

పరికర్మగణితము

ఘనమూలము

వ. [1]అందుఁ బంచమ (పరికర్మంబైన) మనంబు చెప్పిన తదనంతరంబ షష్ఠ (పరికర్మంబైన) ఘనమూలంబు చెప్పుదు నది యెట్టిదనిన;

పంచమ ప్రక్రియ ఘనగణనం చెప్పిన తరువాత ఆరోప్రక్రియ ఘనమూలం గురించి చెబుతాను.

క. ఘనమూలము గొని తత్కృతి
గొనకొని త్రిగుణించి భాజ్య గోచరభక్తం
బునకృతి త్రిమూల [2]గుణితము
గనుఁగొని శోధ్యమునఁ బుచ్చ ఘనమూల మగున్.[3] 1

---

(1) అందు షష్ఠఘనమూలపరికర్మకరణసూత్రం బెట్టిదనిన,

(2) గుణమై

(3) దీనికి వివరణము: 77308776 యొక్క ఘనమూలము గనుఁగొను విధము.
(భాజ్యము, శోధ్యము, ఘనము)

శోఘ భాశోఘు భాశోఘ
౭౭ । ౩౦౮ । ౭౭౬

అధిక ఘనము ౪^3= ౬౪

ఘనమూల కృతికిఁ ౪^2 ×౩=౪౮) ౧౩౩ (౨

ద్రిగుణము. ౯౬

౩౭౦

భాగలబ్ధి (భక్తము) యొక్క ౨^2×౩×౪ ౪౮
కృతిని త్రిగుణించి మొదటి ఘ
నమూలముతో గుణించగావచ్చినది. ౩౨౨౮ ౪౨౬ఘనమూలము.

భాగలబ్ధి ఘనము ౨^3 ౮

ఘనమూలం కనుక్కొనే పద్ధతిని "**పద్యంలో చెప్పిన సూత్రభావం:** ఎడమచివరఘనంలో (ఘనందాకా ఉన్న భారంలో) ఏమూలంయొక్క ఘనం పోతుందోచూసి, ఆ ఘనంతీసి వేయాలి. మూలాన్ని (ఇది a అనుకొందాం) పంక్తిలో రాసి ఉంచాలి. ఈ మూలవర్గాన్ని త్రిగుణంచేసి, దానితో (అంటే a^2తో) తరువాత అఘనాన్ని (అంటే భాజ్యాన్ని) భాగించి, వచ్చినవిభక్తాన్ని (b అనుకొందాం) పంక్తిలో వ్రాసిలబ్ధం తీసివేయాలి. మళ్ళీ ఇదే విభక్తం వర్గాన్ని (b^2) మొదటి మూలంతోను, మూడుతోను గుణించి ($3ab^2$తో) తరువాత అఘనంలో (శోధ్యంలో) లేనివేయాలి. ఇప్పుడు మనంలోనించీ, పైవిభక్తం (b)యొక్క ఘనం (b^3) తీసివేయాలి. ఇచ్చింది ఖచ్చితమైన ఘనసంఖ్య అయితే ఇక్కడకు శేషంసున్న అవుతుంది. చివరకు పంక్తిలో ఏర్పడి ఉన్న సంఖ్యే కావలసిన ఘనమూలం"

*ఒక క్లిష్టమైన ప్రక్రియను చూచాయగా ఈ పద్యంలో వివరించాడు మల్లన.

గమనిక : దత్తసంఖ్యను కుడి చివరినుండి మూడేసి అంకెలుగా విభజించుకోవాలి. ఈ మూటిలో మొదటిది ఘనస్థానం. రెండవది శోధ్యం (దీనినించి తీసివేయాలి), మూడవది భాజ్యం (దీనిని భాగించాలి). కాబట్టి ప్రతి అంకత్రికం – ఒక ఘనం, రెండు అఘనాలలో ఏర్పడుతుంది.

అనులోమ ప్రక్రియలో ఘనం కట్టేటప్పుడు $(10a+b)^3$లోని విస్తరణలో ఉన్న a^3, 3ab, $3ab^2$, b^3 రాసులు, విలోమప్రక్రియలో ఎదురౌతాయి.

ఘనమూలకృతికిఁ ద్రిగుణము ౪౨^2×౩=౫౨౯౨) ౩౨౨౦౭ (౬

౩౧౭౫౨

భాగలబ్ధి (భక్తము) యొక్కకృతిని ౪౫౫౭
త్రిగుణించి ఘన ౬^2×౩×౪౨ = ౪౫౩౬
మూలముతో గుణించ గావచ్చినది.

౨౧౬

భాగలబ్ధి (భక్త) ఘనము ౬^3 ౨౧౬

౦

ఈ ప్రక్రియ పూర్తిగా అవగతంకావడానికి ఉదాహరణలు చేయడం అవసరం.

క. [1]ఘన శోధ్య భాజ్య మూలము
లును నఘనమ్మును ననం గలుగు కందువలం
గనుఁగొనినఁ గాని తెలియదు
ఘనమూలవిధాన మద్ది గణకవరేణ్యా. 2

ఘనము, శోధ్యము, భాజ్యమూలములు, అఘనము–లు సాంకేతిక పదాలు. వీటిని తెలుసుకుంటేనేగాని ఘనమూల విధానం తెలియదు.

గమనిక : ప్రస్తుతం గణితగ్రంథాలలో ప్రయోగిపబడే భాజ్యం, విభక్తం పదాల భావం వేరు –

(1) క. ఘన శోధ్య భాజ్యలను లాం
ఛనముల కందువలెఱింగి చయ్యనఁ దగఁ ద
ద్ఘనమూలాది విధానము
లోనరంగాఁ జేయు గణిత మూహించి వడిన్.

మనము నిడుపు గీటును, శోధ్యము అడ్డ గీటును, భాజ్యము సున్న, ఈ లెక్కల సంజ్ఞలు. భాజ్యగోచరభక్తా లన్నవి : లబ్ధఘనమూలంలోను తుదలెక్క ఘన మనిపించుకొనును. ఆవలిలెక్క శోధ్యము గోచరము గనుక గోచరము ననిపించుకొనును. దాని ఆవలిలెక్క భాజ్య మనిపించుకొనును. ఈవరుసనె యీలెక్కలు చెప్పేది. అర్థంచెప్పే సంస్కృతశ్లోకము.

ఘనమూలంస్యాత్ కృత్యాత్రిగుణీకృతయా భజేధవా తత్తస్య ।
వర్గస్త్రిపూర్వగుణితశ్శోధ్యోద్యఘనే ద్వితీయపదే ॥

అర్థము : ఘనమూలంస్యాత్= ఘనమూలముగొని కృత్యా : దానివర్గవుగొని, త్రిగుణీకృతయా= మూటను గుణియించి, భజేధవా= భాజ్యస్థానముక్రింద బెట్టి పాలుగొని, తత్తస్యవర్గః= పాలుగొనగా వచ్చిన లబ్ధం..... వర్గువు గొనేది. మూటగుణించి పూర్యగుణితం= తొలుత ఘనమూలము కొనగా వచ్చిన లెక్కతో గుణించి, శోధ్య= శోధ్యస్థానము క్రింద బెట్టి, శోధించి= పుచ్చు లెక్క .....చిక్కిన శేషమున్న క్రమాననే, ఘనమా నేషు= సమూలమున్ను గొనేది. (?) గణితం లోను తెలుఁగు పద్యం.

వర్గమూల గణనంలో బేసి, సరి స్థానాలను నిలువుగీటు (1), అడ్డుగీటు (−1)సంకేతాలతో గుర్తించినట్లు, ఘనముల గణనంలో ఘనానికి నిలువుగీటు (1), శోధ్యమునకు అడ్డగీటు (−) భాజ్యమునకు (0) అనేవి సంజ్ఞలు.

క. ఏకాద్యఘనానీకము
ప్రాకటముగ నిలిపి దానిఁ బరువడి తోడన్
జేకొని మూలము కొని మతి
మాకును నెఱిఁగింపు గణితమార్గము తెలియన్. 3

(లేక)

క. ఏకాది నవాంతఘనా
నీకములకు వేఱు వేఱ నిజముగ ఘనమూ
లాకృతిఁ జక్కఁగ బుద్ధివి
వేకించి యెఱుగఁజెప్పు విద్వన్మహితా.[1] 4

ఒకటి మొదలు తొమ్మిది వరకు గల అంకెల ఘనములను వరుసక్రమంలో రాసి, వాటి ఘనమూలాకృతులను వివరించండి.

మూలం	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ఘనం	1	8	27	64	125	216	343	512	729

గమనిక: ఈ పట్టిక 151 ఆరోపంలోనూ ఉన్నది.

(1) క. ఏకాది నవాంత్యముగా । నేకములకు వేఱువేఱ నిడి యిది ఘనమూ
లాకృతి పారము బుద్ధివి । వేకముతో నెఱుఁగఁ జెప్పు విద్వత్తిలకా !

ఇందుకు సంజ్ఞలు ఘనం, శోధ్యం, భాజ్యం యివి ఒడ్డు మీద నిలిపి గుణించేది ఘనమూలపు మగ్గ.

	౧	౮	౨౭	౬౪	౧౨౫	౨౧౬	౩౪౩	౫౧౨	౭౨౯	౦	ఘనం
౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౦		మూలం

చ. గుణశశిరంధ్ర వారిధులకు న్నగతర్కగజాంబరర్తు వా
రణ శశిసంఖ్యకుం గతికరద్వీప[1] వహ్ని శశాంక సంఖ్యకున్
గణితవిధిజ్ఞ! శైలగుణ ఖర్తువిలోచన పద్మగర్భ ష
డ్గుణములకున్ రచింపు దొరకూడిన తద్ఘనమూలపద్ధతుల్. 5

ఒడ్లు ౪౯౧౩ ౧౮౬౦౮౬౭ ౧౩౮౨౪ ౩౬౯౨౬౦౩౭

లబ్ధాలు ౧౭ ౧౨౩ ౨౪ ౩౩౩.*

ఎక్కసఘన్నోమూలో ఎక్కా. అట్టస ఘన్నోమూలో బిన్ని. సత్తవిసఘన్నోమూలో తిన్ని, చౌషష్టిసఘన్నోమూలో చారి. పణువీసోత్తర ఏకశతఘన్నోమూలో పంచా. సోళాహెూత్తర బిన్నిశతఘన్నోమూలో చాహా. త్రేతాళోత్తరతిన్నిశతఘన్నోమూలో సత్తా. బిన్ని దశోత్తర పంచశత ఘన్నోమూలో అట్టా. నవబిన్నో (వింశో)త్తర సప్తశత ఘన్నోమూలో నవ్వా. సున్నస ఘన్నోమూలో సున్న.

ఇందుకు తెలుఁగు పలుకుబళ్లు :

ఒకటి ఘనమూలము ఒకటి. ఎనిమిది ఘనమూలను రెండు, ఇరవైఏడు ఘనమూలము మూడు. అఱువైనాలుగుఘనమూలము నాలుగు. నూటఇరవైఅయిదు ఘనమూలము అయిదు. ఇన్నూట పదహారు ఘనమూలము ఆఱు. మున్నూటనలభైమూడు ఘనమూలము ఏడు. అయినూటపన్నెండు ఘనమూలము ఎనిమిది. ఏడునూటయిరవై తొమ్మిది ఘనమూలము తొమ్మిది. సున్న ఘనమూలము సున్న.

(1) ......శంకర నేత్ర శీతురు
గ్గణనకుఁ బర్వతాగ్ని దివికర్మ కరాంబురుహాసనారిష
డ్గుణములకున్ గణింప నొడఁగూడినఁ దద్ఘనమూల మెంతగున్.

* ఈ ఘనమూలంలోది మొదలి ఒడ్డు లబ్ధము ౪౯౧౩. దీనిఘన ఒడ్డు ౧౭ యిందు లబ్ధమూలంలోది మొదలి ౧న్ని జూపి యక్కసఘన్నో మూలో యక్కా అని ఒడ్డుమీదవేసి భాగించేది. వొడ్డుకింద ౧ వేసి యక్కసవర్గో యక్కా అని ౧ వేసేది. ఆ ౧న్ని త్రిగుణిస్తేను మూడు ఆయను. యీ కిందను లబ్ధఘనములోది రెండోలెక్క ౭ గనుక ఆ ౭న్ను మూటికిందవేసి సప్తతియ్యం యక్కావీసా అని ఒడ్డుమీద ౧ వేసి భాగారిస్తేను ౧౮౧౩ నిలిచెను. ఇందుమీదను లబ్ధఘనమూలములోది రెండోలెక్క ౭న్ను వర్గునుచేస్తేను ౪౯ ఆయను. ఇవి ౩ బెట్టి గుణిస్తేను ౧౪౭ ఆయను. ఇని ఒడ్డుమీదవేసి భాగారిస్తేను ౩౪౩ నిల్చెను. యీ లబ్ధఘనమూలంలోది ౭ న్ను రెండో లెక్కను ఘనమూలముచేసేది. గనక త్రేతాళోత్తర తిన్నిశతఘన్నోమూలో సప్తఅని ఒడ్డుమీదను ౩౪౩ వేసి సరి అని తుడిచేది.

గుణ–3, శశి–1, రంధ్ర–9, వారిధులు–4. ఇది ఒక సంఖ్య 4913. రెండోసంఖ్య. నగ–7, తర్క–6, గజ–8, అంబర–0, ఋతు–6, వారణ–8, శశి–1; ఈ సంఖ్య– 1860867.

మూడోసంఖ్య: గతి–4, కర–2, ద్వీప–8, వహ్ని–3, శశాంక–1, ఈ సంఖ్య– 13824.

నాల్గోసంఖ్య: శైల–7, గుణ–3, ఖ–0, ఋతు–6, విలోచన–2, పద్మగర్భ–9, షట్–6, గుణములు–3. ఈ సంఖ్య= 36926037.

దీని రెండోఒడ్డు ౧౮౬౦౮౬౭ దీని లబ్ధఘనమూలము ౧౨౩ యిందు్క యీ లబ్ధఘనమూలంలోది మొదలి ఒకటిన్ని జూపి యక్కసఘన్నోమూలో యక్కా అని ఒడ్డు మొదలిలెక్క ౧ మీదను ౧ వేసిసరి అని తుడిచి తిరుగాను ఆ ఒకటి ఒడ్డుక్రింద వేసింది యక్కసవర్గో యక్కాఅనేది ఆ ౧ త్రిగుణించేది. త్రిగుణిస్తేను 3 ఆయను. యిందుకింద లబ్ధఘనమూలంలోది రెండోలెక్క రెండున్ను వేసి బితియ్యా చాహా అని ఆఒడ్డుమీద ౬ వేసి యెన్మిదింటిలో ఆరున్ను దీసివేసేది. యీ ౩ న్ను ఒడ్డు ౬ కిందికి ఉత్సార్యచేసి లబ్ధఘనమూలంలోది కడలెక్క. ౩న్ను ఆమాటికిందవేసి తింతియ్యానవ్వా అని ౬ మీదవేసి భాగారిస్తే యీసరికి ఉన్న లెక్కలు : ౧౭౦౮౬౭ నిల్చెను, లబ్ధఘనమూలంలోది ఒకటి విడిచి యిరువయి మూడు వర్గువుచేస్తేను ౫౨౯ ఆయను. ఇవి ౩ గుణిస్తేను ౧౫౮౭ ఆయను. ఇవి ఒడ్డుమీదవేసి భాగారించగాను నిలిచిన శేషం ౧౨౧౬౭ నిల్చెను. తిరుగాడు లబ్ధఘనమూలంలోది ౨ లెఖ ౨ జూపి అట్టంన్నా ఘన్నోమూలో బిన్ని అని ఆఒడ్డుమీదను ౮ వేసి భాగించగా నిల్చినశేషం ౪౧౬౭ నిల్చెను. ఒడ్డుకిందను వేసిన ౨న్ను బియ్యసవర్గోచారి అని...వేసేది. ఇవి త్రిగుణిస్తేను ౧౨ ఆయను. ఇందికింద లబ్ధఘనమూలంలోది కడలెక్క ౩ శెట్టి బారాతియ్యా ఛత్రీసా అని ౩౬ వేసి భాగారించగాను నిలిచినవి ౫౬౭ నిల్చెను. తిరుగాను లబ్ధఘునమూలంలోది కడవ్రాయిలెక్క 3న్ను వర్గవుచేస్తేను ౯ ఆయను. యిందు్క. భాజ్యగోచర భక్తాలన్నవి లెక్కసంజ్ఞలు. యీలబ్ధఘలమూలము ౧౨ గనక యిది ౩ లెక్క గనక దీని తుదలెక – ౩ భాజ్యమనిపించును. దీని ఆవెలిలెక్క ౨న్ను గోచరమే చోద్యమన్నది గనక యీ ౨ గోచరమనిపించును. యీగోచరమున్నస్థానానను ౨ ఉన్నది గనక యీ ౨ చేతిను ౯ గుణిస్తేను ౧౮ ఆయను. ఇవి త్రిగుణిస్తేను ౫౪ ఆయను. ఇది ఒడ్డుమీదనువేసి, భాగారిస్తేను ౨౭ నిల్చెను. ఇందు్క లబ్ధఘనమూలంలోది, కడవ్రాయి ౩న్ను ఘనమూలము చేసేది గనక సప్తావీసఘన్నోమూలో తిన్ని అని ఒడ్డుమీద ౨౭ వేసి సరి అని తుడిచేది. ఎన్నియైనా యీలాగ...ననే గుణించేది.

ఈ నాలుగు సంఖ్యల ఘనమూలాలు :

$\sqrt[3]{4913} = 17$

$\sqrt[3]{1860867} = 123$

$\sqrt[3]{13824} = 24$

$\sqrt[3]{36926037} = 333.$

క. శరనయనఋతు నవాంబుధి
సరసిజ భవగిరి నభోక్షి చంద్రులకు గజాం
బంనేత్రాంబరముని గతి
కరిశశిరసములకు నెంత ఘనమూలమగున్. 6

ఒడ్లు ౧౨౦౭౯౪౯౬౨౫, ౬౧౮౪౭౦౨౦౮.

లబ్ధాలు ౧౦౬౫, ౮౫౨.

శర–5, నయన–2, ఋతు–6, నవ–9, అంబుధి–4 సరసిజభవ–9, గిరి–7, నభ–0, అక్షి–2, చంద్రుల–1.

ఈ సంఖ్య – 1207949625

దీని ఘనమూలం $-\sqrt[3]{1207949625} = 1065$

రెండోసంఖ్య – గజ–8, అంబర–0, నేత్ర–2, అంబర–0, ముని–7, గతి–4, కరి–8, శశి–1, రస–6.

ఈ సంఖ్య – 618470208

దీని ఘనమూలం $-\sqrt[3]{618470208} = 852.$

ఆ.వె. జలధి వేద సహ్ని శరనేత్ర నయనాద్రి
నాగఖాంబరాక్షి! నయనములకు
కరి గజాబ్ధి గగనగతినిధి నయనాగ్ని
[1]కాలరసగిరులకుఁ గదియఁ జెప్పు. 7

(1) గుణరసాద్రులకును గణనయెంత.

ఒడ్లు ౨౭౦౦౮౭౨౨౫౩౪౪ ౭౬౩౩౨౯౪౦౪౮౮

లబ్ధాలు ౬౪౬౪ ౪౨౪౨.

మొదటిసంఖ్య : జలధి–4, వేద–4, వహ్ని–3, శర–5, నేత్ర–2, నయన–2, అద్రి–7, నాగ–8, ఖ–0, అంబర–0.

అక్షి–2?(7) నయనములు–2 కాబట్టిసంఖ్య–270087225344 దీనికి ఘనమూలం$=\sqrt[3]{270087225344} = 6464.$

రెండోసంఖ్య: కరి–8, గజ–8, అబ్ధి–4, గగన–0, గతి–4, నిధి–9, నయన–2, అగ్ని–3, రస–6, గిరులు–7.

కాబట్టి సంఖ్య= 76332940488

ఘనమూలం$= \sqrt[3]{76332940488} = 4242$

గమనిక: పద్యం ప్రకారం మొదటి దత్తసంఖ్య 220087225344 – కాని దీని ఘనమూలం 6464 కాదు.

6464 ఘనమూలంగా ఉన్న సంఖ్య 270087225344. దత్తసంఖ్య ఘనసంఖ్యకాదు – (not a perfect cube).

దత్తసంఖ్య ఎడమనుండి కుడికి రెండో స్థానంలో 2 ఉంటే సరిపోదు. 7 ఉండవలె.

ఆ.వె. నవశశాంకచంద్ర నగశశి[1] నిధి వియ
త్తర్క నయనములకుఁ దర్కశైల
గిరి గజాంబరాగ్ని గిరిమునులకు ఘన
మూల మెఱింగి చెప్పు ముదముతోడ. 8

ఒడ్లు ౨౬౦౯౧౭౧౧౯, ౭౭౩౦౮౭౭౬

లబ్ధాలు ౬౩౯, ౪౨౬.

(1) .... నవఖర్తు । నయనములకు । దర్కనగమునీంద్ర దంతియంబగాగ్ని ధరణీధ్రమునులకు । ముదముతోడను ఘనమూల మెంత.

నవ-9, శశాంక-1, చంద్ర-1, నగ-7, శశి-1, నిధి-9, వియత్-0, తర్క-6, నయన-2.

కాబట్టి మొదటిసంఖ్య= 260917119

దీని ఘనమూలం= $\sqrt[3]{260917119}$= 639

రెండోసంఖ్య తర్క-6, శైల-7, గిరి-7, గజ-8, అంబర-0, అగ్ని-3, గిరి-7, మునులు-7

కాబట్టి రెండోసంఖ్య= 77308776

దీని ఘనమూలం= $\sqrt[3]{77308776}$= 426.

క. వనధిగజేంద్రియ శరశశి
మునిగిరి నయనాబ్ధినేత్రము[1]లకును ఋతుశై
లనగనిధి తురగగుణత
ర్కనయన రసశశులకెంత ఘనమూలమగున్. **9**

ఒడ్లు ౨౪౨౭౭౧౫౫౮౪ ౧౬౨౬౩౭౯౭౭౬

లబ్ధాలు ౧౩౪౪ ౧౧౭౬.

వనధి-7, గజ-8, ఇంద్రియ-7, శర-5, శశి-1, ముని-7, గిరి-7, నయన-2, అబ్ధి-4, నేత్రములు-2.

కాబట్టి మొదటిసంఖ్య= 2427715584

దీనికి ఘనమూలం= $\sqrt[3]{2427715584}$= 1344.

అట్లాగే రెండోసంఖ్య ఋతు-6, శైల-7, నగ-7, నిధి-9, తురగ-7, గుణ-3, తర్క-6, నయన-2, రస-6, శశి-1.

కాబట్టి సంఖ్య: 1626379776

దీని ఘనమూలం $\sqrt[3]{1626379776}$= 1176.

(1) ....లు ఋతుగిరివా । హనిధిహయగుణరసకరత?
ర్క నిశాపతులకును నెంత ఘనమూలమగున్.

ఆ. జలధిరసగజాష్టజలధి నిధీంద్రియ
జలధిరంధ్రకమల జన్మతర్క
పురశశాంక [1]శశినభోనిధిసాయక
కరులకై నఫలము గణక ! చెపుమ. **10**

ఒడ్లు ౮౫౯౦౧౧౩౬౯౯౪౫౯౪౮౮౬౪

లబ్ధం ౯౫౦౬౦౪.

జలధి-4, రస-6, గజ-8, అష్ట-8, జలధి-4, నిధి-9, ఇంద్రియ-5, జలధి-4, రంధ్ర-9, కమలజన్మ-9, తర్క-6, పుర-3, శశాంక-1.

శశి-1, నభ-0, నిధి-9, సాయక-5, కరులు-8.

కాబట్టిసంఖ్య - 859011369945948864

దీని ఘనమూలం= $\sqrt[3]{859011369945948864}$= 950604.

ఇతి శ్రీ...సార సంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందుఁ ప్రథమ పరికర్మగణితము ఘనమూలము సమాప్తము.

* * *

(1) ....శీతకరనభోనిధిబాణ ।

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

పరికర్మగణితము

సంకలితము.

వ. [1]అందు షష్ఠ (పరికర్మంబైన) ఘనమూలంబు చెప్పిన తదనంతరంబు సప్తమ (పరికర్మంబైన) సంకలితముఁ జెప్పుదునది యెట్టి దనిన;

ఆరవ పరికర్మ ఘనమూలం వివరించిన పిదప ఏడవ పరికర్మ సంకలితం గురించి చెబుతాను.

క. [2]ఒకఁడూనమైన గచ్ఛను
బ్రకటోత్తరగుణముచేసి పదపడి యాది
ద్వికమందుఁ గూడి గచ్ఛను
సకలము గుణితార్ధమైన సంకలితమగున్.[3] 1

(1) అందు సప్తమ సంకలిత పరికర్మణికరణ సూత్రం బెట్టిదనిన;

(2) ఈ మూడింటి యేర్పాటు సంజ్ఞలు ఆది ఉత్తర గచ్ఛలనేటివి. ఇందుల వివరము. ఆది అనేది వర్తకుడు వర్తకమాడ గొంపోయిన ధనం పేరు. ఉత్తర అనేది ఒక్కొక్క ఊర లాభంగలిగిన వస్తువుకుపేరు. గచ్ఛ అనేది తాను తిరిగిన ఊళ్లకు పేరు. ఇందుకు సంస్కృతపు శ్లోకము.

రూపేణోనం గచ్ఛం ప్రచయగుణం ద్విగుణితాది సంయుక్తం ।
గచ్ఛాభ్యస్తం ద్విహృతం సంకలితం భవతి సర్వేషాం ॥

అర్థం : రూపేణోనంగచ్ఛం= గచ్ఛవలన ఒకటిపుచ్చి, ప్రచయసుగుణం= ఉత్తరను గుణించి, ద్విగుణితాది= ఆది ద్విగుణించి, సంయుక్తం= రాశికలయగూడి, గచ్ఛాభ్యస్తం= గచ్ఛను గుణించి, ద్విహృతం= రెంటను బాలుగొనగాను, సంకలితం భవతి సర్వేషాం= సంకలితం ధనం వచ్చును. తెనుగు పద్యానికి:

(3) గచ్ఛలోను ఒకటి పుచ్చేది. ఉత్తరను గుణించేది. ఆది ద్విగుణించి దాన్ని గచ్ఛనుపుచ్చిన దాన్ని కలియగూడి గచ్ఛను రాశి గుణించేది. అది అర్ధిస్తేను సంకలితధనం వచ్చును.

గచ్ఛనుండి ఒకటి తీసివేసి వచ్చిన మొత్తంతో ఉత్తరను గుణించి “ఆది”ని రెట్టింపు (ద్వికం)చేసి, కలిపి గచ్ఛను ఆ సంఖ్యతో గుణించి గుణలబ్ధాన్ని సగం చేస్తే సంకలితధనం లభిస్తుంది.

ఇక్కడ మూడు సాంకేతిక పదాలున్నాయి. వాటిని తెలుసుకోవాలి.

గచ్ఛ – వర్తకుడు తిరిగిన పట్టణాలు

ఉత్తర – ఒక్కొక్క పట్టణంలో లాభం

ఆది – వర్తకుని పెట్టుబడి ధనం

పద్యంలో ప్రతిపాదించిన పద్ధతిని సోదాహరణంగా వివరిస్తాము. గచ్ఛ –12, ఉత్తర –5, ఆది–6 అనుకొందాం.

పద్యం మొదటిపాదం ప్రకారం 12–1=11ను తీసుకోవాలి. రెండవపాదం ప్రకారం 5×11=55.

తరువాత చెప్పినట్లు ఆది నిద్వికంచేస్తే 6×2=12 వస్తుంది.

దీనిని 55కు కలిపితే 67 వస్తుంది.

దీనిని 12తో గుణించాలి, అంటే 67×12.

ఇందులో సగం, సంకలితధనం అంటే 67×6=402

నేడు మనంవాడే సంకేతాలతో – అంకశ్రేఢిమొత్తం S

$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

n= 12, a=6, d=5 ప్రతిక్షేపిస్తే

$S=\frac{12}{2}[2x6+(12-1)x5]=402$ లభిస్తుంది.

ఒక టూనమైన గచ్ఛ అన్నందుకు గచ్ఛను ౧ దీని ప్రకటోత్తర గుణము చేసి యన్నందుకు ఉత్తరచేతను గుణించి ఆది ద్వికమందుగూడి ఆది యినుమడించి కూడేది. గచ్ఛను సకలము గుణితార్ధము అన్నందుకు గచ్ఛను గుణించి అర్ధిస్తేను సంకలితధనం వచ్చును.

***క. ఏకాది దశోత్తరముగ**
నేకాది దశాంకములకు హేమములోలిన్
జేకొనిరి వణిజులు పదుం
ద్రాకరమునఁ గన్నమాడ లవి యెన్నియగున్. 2

పదిమంది వర్తకులు ఒకటినుండి పదివరకు "ఆది", "ఉత్తర"లను గ్రహించి వ్యాపారం జరిపితే వారికి లభించిన మాడలెన్ని? ఇక్కడ పదిమంది వణిజులు పదిగ్రామాలు తిరిగారు.

గచ్ఛ–10, ఉత్తర–10, ఆది=1 గా మొదటివాడు ప్రారంభిస్తాడు.

ఆది 1, ఉత్తర 1, గచ్ఛ 10,

దీనిని ఉత్తరతో గుణిస్తే 9×1=9 అవుతుంది.

*క. ఏకాద్యేకోత్తరముగ
నేకై కాధికములైన హేమములోలిన్
జేకొని పదుంద్రు దశవణి
జాకరమునఁ గన్నమాడలవి యెన్నియగున్.

ఇది ఏకాద్యేకోత్తరముగ అన్నపద్యానకు అర్థం : పదుగుండ్రు బేరగాండ్రు పది పట్నాలు దిరిగినారు. అందుకు వారికి గలిగినలాభం.

మొదలివాడు	ఆది	౧	ఉత్తర	౧	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౫౫
రెండోవాడు	ఆది	౨	ఉత్తర	౨	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౧౧౦
మూడోవాడు	ఆది	౩	ఉత్తర	౩	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౧౬౫
నాలుగోవాడు	ఆది	౪	ఉత్తర	౪	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౨౨౦
అయిదోవాడు	ఆది	౫	ఉత్తర	౫	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౨౭౫
ఆరోవాడు	ఆది	౬	ఉత్తర	౬	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౩౩౦
ఏడోవాడు	ఆది	౭	ఉత్తర	౭	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౩౮౫
ఎనిమిదోవాడు	ఆది	౮	ఉత్తర	౮	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౪౪౦
తొమ్మిదోవాడు	ఆది	౯	ఉత్తర	౯	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౪౯౫
పదోవాడు	ఆది	౧౦	ఉత్తర	౧౦	గచ్ఛ	౧౦	ఇందుక్కు	లబ్ధసంకలితధనం	౫౫౦

ఇప్పుడు ఆదిని ద్వికం చేస్తే 1+1=2 అవుతుంది.

ఈ రెండు కలిపితే 9+2=11

ఈ 11ను గచ్ఛతో పెంచితే 11×10=110

ఇందులో అంటే 110లో సగం, సంకలితలబ్ధం అంటే 55 మాడలు.

మిగతా 9 మంది వణిజుల వ్యాపార వివరాలను కలిపి మొత్తం 10 మందిని గురించి వివరిస్తే కింది పట్టిక ఏర్పడుతుంది.

ఆది	౧	ఉత్తర	౧	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౫౫
ఆది	౨	ఉత్తర	౨	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౧౧౦
ఆది	౩	ఉత్తర	౩	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౧౬౫
ఆది	౪	ఉత్తర	౪	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౨౨౦
ఆది	౫	ఉత్తర	౫	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౨౭౫
ఆది	౬	ఉత్తర	౬	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౩౩౦
ఆది	౭	ఉత్తర	౭	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౩౮౫
ఆది	౮	ఉత్తర	౮	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౪౪౦
ఆది	౯	ఉత్తర	౯	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౪౯౫
ఆది	౧౦	ఉత్తర	౧౦	గచ్ఛ	౧౦	ధనము	౫౫౦

ప్రకారాంతరము

ఆది	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౧౦
ఉత్తర	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౧౦
గచ్ఛ	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦
లబ్ధధనం	౫౫	౧౧౦	౧౬౫	౨౨౦	౨౭౫	౩౩౦	౩౮౫	౪౪౦	౪౯౫	౫౫౦

వణిజుడు	ఆది	ఉత్తర	గచ్ఛ	లబ్ధసంకలితం
మొదటివాడు	1	1	10	55
రెండవవాడు	2	2	10	110
మూడవవాడు	3	3	10	165
నాలుగవవాడు	4	4	10	220
అయిదవవాడు	5	5	10	275
ఆరవవాడు	6	6	10	330
ఏడవవాడు	7	7	10	385
ఎనిమిదవవాడు	8	8	10	440
తొమ్మిదవవాడు	9	9	10	495
పదవవాడు	10	10	10	550

గమనిక : మల్లన, అంకశ్రేఢిని (Arithmetic Progression)ని పరిచయం చేస్తున్నాడు. 55, 110,.....550, పది పదాలు గలిగిన అంకశ్రేఢి; తొలిపదం=55, పదాంతరం= 55.

క. వినుమాది మూఁడుగాఁ గొని
యెనిమిది యుత్తరముగాఁగ నిలనొక వణిజుం
డొనరఁగ [1]నఱువది పురములు
చని వాణిజ్యమున నెంత సంపద వడసెన్. 3

ఆది ౩ **ఉత్తర** ౮ **గచ్ఛ** ౬౦ **లబ్ధం** ౧౪౩౪౦.

ఆది 3, ఉత్తర 8గా 60 పురములు తిరిగిన వర్తకుని రాబడి ఎంత?

ఆది=3, ఉత్తర=8, గచ్ఛ=60

ఒకటూనమైన గచ్ఛ= 60-1=59

ఉత్తరతో గుణించాలి → 59×8= 472 - (1)

(1) నలువది.

ఆది ౩ ఉత్తర ౮ గచ్ఛ ౪౦ లబద్ధం ౬౩౬౦

ఆది నిద్వికం చేయాలి → 3+3= 6 - (2)

1+2 → 472+6= 478 - (3)

గచ్ఛ మరియు (3)లను గుణించాలి → 478×60= 28680 - (4)

(4)లో సగం, అంటే 14340 రాబడి (బడసిన సంపద)

క. పదమూఁడు నాదిగాఁగొని
పది యుత్తరగాఁగ నొకఁడు పట్టణము లొగిన్
బదియాఱింటి వణిక్క్రియ
ముదమునఁ బడసిన సువర్ణములు సెప్పుమొగిన్. 4

ఆది ౧౨ **ఉత్తర** ౧౦ **గచ్ఛ** ౧౬ **లబ్ధం** ౧౪౦౮.

ఆది=13, ఉత్తర=10, గచ్ఛ=16 గా వర్తకుడెంత సంపాదించాడు?

ఒకటూనమైన గచ్ఛ=16-1=15

దీనిని ఉత్తరతో గుణించండి → 15×10=150 (1)

ఆదిని ద్వికం చేద్దాం → 13+1 3=26 (2)

1+2 → 150+26=17 6 (3)

గచ్ఛ×3 → 176×14= 2816 (4)

వణిజుడు బడసిన సువర్ణాలు - (4)లో అర్ధం అంటే 2816÷2=1408.

తే. ఆది యెనిమిది యుత్తర మాఱుగాఁగఁ
బట్టణంబులు పదమూఁడు పరగసొచ్చి
దేసిగాఁగ వణిక్ క్రియఁ జేసి యొక్కఁ
డెంతధన మందె గణక! మా కెఱుఁగఁ జెప్పు. 5

ఆది ౮ **ఉత్తర** ౬ **గచ్ఛ** ౧౩ **లబ్ధం** ౫౭౨.

ఆది=8, ఉత్తర=6, గచ్ఛ=13 అయిన సంపాదనఎంత?

ఒకటూనమైన గచ్ఛ=13-1=12

దీనిని ఉత్తరతో గుణిస్తే→12×6=72 (1)

ఆదిని ద్వికం చేద్దాం→ 8+8=16 (2)

1+2→72+16=88 (3)

గచ్ఛ×3→13×88= 1144 (4)

ఈ వాణిజ్యక్రియలో అందిన ధనం - (4)తో అర్థం అంటే 1144÷2=572. మాడలు అనుకొందాం.

క. [1]నాలుగు మొదలుగ నెనిమిది
పోలcగ నుత్తరముగాcగc బురుషసహస్రం
బోలిగొనిచేర్చి ప్రీతి శి
వాలయముల కిడcగ మాడలవి యెన్ని యగున్. **6**

ఆది ౪ ఉత్తర ౮ గచ్ఛ ౧౦౦౦ ధనము ౪౦౦౦౦౦౦.

ఆది=4, ఉత్తర=8, గచ్ఛ=1000 అయిన సంపాదన ఎంత?

ఒకటూనమైన గచ్ఛ=1000−1=999

దీనిని ఉత్తరతో గుణిస్తే→999×8=7992 (1)

ఆదిని ద్వికం చేద్దాం→ 4+4=8 (2)

1+2→7992+8=8000 (3)

గచ్ఛ×(3)→8000×1000= 8000000 (4)

శివాలయమున కిచ్చిన మాడలు− (4)తో సగం అంటే 8000000÷2= 4000000.

క. ఒక్కcడు మొదలుగ[1] దినమున
కొక్కం డుత్తరముగాcగ నొకc డర్చించెన్
ముక్కంటికి నరుణాబ్జము
లక్కాంచనసుమము లేటి కట్లెన్నియగున్. **7**

ఆది ౧ ఉత్తర ౧ గచ్ఛ ౩౬౦ ధనము ౬౪౯౮౦.

(1) నాలుగుమాడలు మొదలిరు । నాలుగు నుత్తరము గాcగ నగసహస్రం
బేలిన పతిచేc గృతిగొని । రాలోకింపంగ మాడ లవి యెన్ని యగున్.

ఆది=1, ఉత్తర=1, గచ్ఛ=360 అంటే ఒకటి ఆదిగా, దినానికి ఒక ఉత్తరగా బంగారు ఎర్రదామరలు 360 రోజులు శివాలయానికర్పిస్తే అవి ఎన్ని?

ఒక టూనమైన గచ్ఛ=360−1=359

దీనిని ఉత్తరతో 1 గుణిస్తే→359×1=359 (1)

ఆదిని ద్వికం చేద్దాం→1+1=2 (2)

1+2→359+2=361 (3)

గచ్ఛ×(3)→ 360×361= 129960 (4)

శివాలయానికి అర్పించిన సువర్ణపుష్పాలు− (4)తో సగం అంటే 129960÷2=64980.

క. తనజన్మదినము మొదలుగ
దినమున [2]కొక్కటియు మిగుల దినకరునకుc గాం
చన పుష్పార్చన లొనరిం
చె నొకండు శతాబ్దములకుcజెప్పు మ వెన్నో. **8**

ఆది ౧ ఉత్తర ౧ గచ్ఛ ౩౬౦౦౦ సంకలిత (లబ్ధ) కాంచన పుష్పాలు ౬౪౮౦౧౮౦౦౦.

జన్మదినం ఆదిగ, దినమున కొక్కటిగ పుష్పార్చన నూరేళ్ళ పర్యంతం చేస్తే ఎన్ని పుష్పాలవుతాయి?

ఇక్కడ ఆది=1, ఉత్తర=1, గచ్ఛ=100 సంll అంటే 360×100 రోజులు

ఒకటూనమైన గచ్ఛ. 1=36000−1= 35999

దీనిని ఉత్తరతో గుణిద్దాం 35999×1=35999 (1)

(1) ...... నిచ్చలు । నొక్కరుcడు త్తరము గాcగ నోక్కరుcడర్థిన్
ముక్కంటికెలమినబ్జము । లెక్కించిన నొక్కయేటి కెన్నిమహాత్మా!

(2) కొక్కరుcడు తొగల దినకరునకుc గాం । చనపుష్పార్ఘ్యము లొక్కరుc
డొనరించె శతాబ్దములకు మాహించుమదిన్.

ఈ ప్రకరణమున 1,2,3 సంఖ్యలపద్యములకుమాత్రమే సంస్కృతమూలమున్నది.

ఆదిని ద్వికంచేద్దాం 1+1=2 (2)
1+2 36001 (3)
3×గచ్ఛ 3600136000 (4)
అర్చనకు వాడిన పుష్పాలు (4)లో సగం అంటే
(36001×36000)÷2= 648018000

ఆద్యుత్తరవర్గఘనానయన సూత్రము

క. ....హతి
నేకముగా నాది గలిపి యిష్టాహతమై
యేకాదిద్వచయంబులఁ
బ్రాకటముగ వచ్చు నిట్ల పదకృతిఘనముల్. 9

పద్యం అసంపూర్ణం: మల్లన యిచ్చిన పదకృతి (Square) ఘన (Cube) పట్టికను చూడండి.

అంకము	లబ్ధవర్గువు (ధృతి)	ఘనము
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000.

గమనిక: ఆతి, ఉత్తరలకు వర్గ, ఘన గణనం చేసినపట్టిక ఇది.

క. ఏకాది దశాంతముగా
నేకాదిద్వచయములను నే...
...యుంబ్ర
త్యేకమ యూహించిచెప్పు మినవిభతేజా! 10

లబ్ధవర్గువున్ను, ఘనమున్ను ౧, ౧, ౪, ౮, ౯, ౨౭, ౧౬, ౬౪, ౨౫, ౧౨౫, ౩౬, ౨౧౬, ౪౯, ౩౪౩, ౬౪, ౫౧౨, ౮౧, ౭౨౯, ౧౦౦, ౧౦౦౦.

౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౧౦
౨	౨	౨	౨	౨	౨	౨	౨	౨	౨
౧	౧	౧	౧	౧	౧	౧	౧	౧	౧

అందు సంకలిత గచ్ఛానయన సూత్రం బెట్టిదనిన, ఈ పద్యం కూడా అసంపూర్ణం.

1 నుండి 10 వరకు మల్లన యిచ్చిన పట్టిక ప్రయోజనం ఫలానా అని తెలయడంలేదు. పట్టిక :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

తే.గీ. అర్థమష్టోత్తరాహతమై ద్వికాది
కోత్తరవి శేషకృతియుతినొంది మూల
ముత్తరాన్వితదళితమై (మర్థమై)యున్న నాదిఁ
బుచ్చి యుత్తరమునఁ గొనవచ్చుగచ్ఛ[1] 11

---

1 గచ్ఛానయన సూత్రవివరణము :

ఆది ౧ ఉత్తర ౧ గచ్ఛ ౧౦ ధనము ౫౫

మూలము

$$\text{గచ్ఛ}\ ౧౦ = \frac{\dfrac{\sqrt{\left\{\left(\underset{\text{ద్వికం}}{౨}\times\underset{\text{ఆది}}{౧}-\underset{\text{ఉత్త}}{౧}\right)^{\text{౨కృతి}}+\underset{\text{అర్థము}}{౫౫}\times\underset{\text{అష్టోత్తరహతము}}{౮}\times౧\right\}}+\underset{\text{ఉత్తర}}{౧}}{\text{౨ అర్థించుట}}-\underset{\text{ఆది}}{౧}}{౧\ \text{ఉత్తరము}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{(౧^{౨}+౫౫\times౮)}+౧}{౨}-౧}{౧}$$

ఇది గచ్ఛను గ్రహించడానికి సూత్రం.

ఆది=1, ఉత్తర=1, గచ్ఛ=10 అయితే లభించే అర్ధము 55 అని ఇదివరకే ఆరోపం 169లో చూచాము.

అంకశ్రేఢి సంకేతాలతో వీటిని పరిశీలిద్దాం.

$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + \overline{n-1}\, d)$ n పదములుగల అంకశ్రేఢి.

మొదటిపదం a, ఇది ఆది. తరువాత శ్రేఢిలో పదాంతరం : d - ఇది ఉత్తర. శ్రేఢి మొత్త S. ఇది సంకలితం.

అంకశ్రేఢిలో పదాల సంఖ్య n ఇది గచ్ఛ.

అంకశ్రేఢిలో S= $\frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ సూత్రం సుప్రసిద్ధం.

ఇప్పుడు a, d, S లు తెలిసినప్పుడు n ను కనుక్కోవడం ప్రస్తుతాంశం.

సూత్రం నుండి : 2S= 2an+n(n-1)d

$$dn^2+(2a-d)n-2S=0$$

ఇది n లో ఒక వర్గ సమీకరణం సాధించి, ధనమూలాన్ని మాత్రం తీసుకొంటే

$$n = \frac{-(2a-d) + \sqrt{(2a-d)^2 8dS}}{2d}$$

$$= \sqrt{౧ + ౪౪౦} = \sqrt{౪౪౧} = ౨౧$$

$$\frac{౨౧ + ౧}{౨} = \frac{౨౨}{౨} = ౧౧$$

$$\frac{౧౧ - ౧}{౧} = ౧౦$$

దీనినే మల్లన సంకేతాల ప్రకారం

$$n = \left\{\frac{\sqrt{(2a-d)^2 8dS} + d}{2} - a\right\} \div d$$

అయింది.

ఇక్కడ సమస్యలో a=1, d=1, S=55 కాబట్టి

$$n = \left\{\frac{\sqrt{(2-1)^2 + 8 \times 55} + 1}{2} - 1\right\} \div 1$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 440 + 1}}{2} - 1$$

$$= \frac{21+1}{2} = 11 - 1 = 10$$

కాబట్టి గచ్ఛ=10.

ఆద్యుత్తరానయన సూత్రము

ఆ. కనక మినుమడించి గచ్ఛంబాల్గొని లబ్ధ
మేకరహిత గచ్ఛ నెత్తలబ్ధ
ముత్తరంబు శేష మొగి పాము గొన్ననం
దాదివచ్చునందు రాదిమునులు.[1] **12**

(1) ఇది గుణించేలక్షణం.

ధనము యినుమడించి గచ్ఛచేత భాగించేది. భాగింపగా వచ్చినలబ్ధం నుంచి ఉత్తరచే ఏకోనగచ్ఛను గుణించగావచ్చిన లబ్ధమును పుచ్చి మిగిలినవి సగం చేస్తేను ఆది అవును.

ఆది ౩ ఉత్తర ౧౩ ధనం ౭౪౮. ఇది గుణించేలక్షణం. ధనం ఎనిమిదింట గుణించి యిది ఉత్తరచేత గుణించగానైన రాశి ౭౭౭౯౨, ఆది ౩ యినుమడించి ఉత్తరను సరిసేయంగాను మిగిలిన ౭ న్ను వర్గించగా ౪౯ అవి ఆరాశిలో గూర్చగాను ౭౭౮౪౧. అవివర్గు మూలం సేయగాను ౨౭౯. అందులో ఉత్తర ౧౩ కలయ గూడితేను ౨౯౨. యివి సగము చేస్తేను ౧౪౬ యిందులో ఆది ౩ తీస్తే ౧౪౩ యివి ఇత్తర ౧౩ చేతను పాలుగొనగాను వచ్చినలబ్ధం ౧౧ గచ్ఛ అవును.

ఇది ఆదిని కనుక్కోవడానికి సూత్రం.

కనకము (ధనము)ను రెట్టించి, గచ్ఛచేత భాగించగా వచ్చిన లబ్ధంనుంచి, ఒకటి తక్కువ గచ్ఛకాగా, దానిని ఉత్తరతో గుణించిన లబ్ధమును తీసివేసి శేషాన్ని సగంచేస్తే ఆది లభిస్తుంది. బ్రహ్మశ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రిగారి పరిష్కృత ప్రతిలోని ఉదాహరణనే కొంత మార్చి తీసుకుందాం.

అంకశ్రేఢి సూత్రంS= $\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ నుండి

ఆది $a = \left\{\frac{2S}{n} - (n-1)d\right\} \div 2$

ఉత్తర= d =13, ధనం= S =748, గచ్ఛ= n =11 లను ప్రతిక్షేపిస్తే

ఆది a =3 అవుతుంది.

క. **మొదలెన్నఁగ మూఁడుత్తర**
పదమూఁడర్థము గజాబ్ధి పర్వతసంఖ్యల్
విదితముగ గచ్ఛ దీనికి
సదమలముగఁ జెప్పు గణితశాస్త్రవిధిజ్ఞా! 13

ఆది ౩ ఉత్తర ౧౩ ధనము ౭౪౮ గచ్ఛ ౧౧.

ఆది 3, ఉత్తర 13, ధనము : గజ–8, అబ్ధి–4, పర్వత–7 కాబట్టి సంఖ్య 748 అయితే గచ్ఛ ఎంత? ఆరోపం 179లో చేసిన లెక్కే ఇది. దీనికిసాధన 11.

క. **వినుమాది నాలుగుత్తర**
మెనిమిదిగాఁగొన్న మాడలేర్పఋపంగా
ధనమది ఖఖరససోములు
ఘనముగఁదద్గచ్ఛయెంత గణితవిధిజ్ఞా! 14

ఆది ౪ ఉత్తరము ౮ ధనము ౧౬౦౦ గచ్ఛ ౨౦.

ఆది–4, ఉత్తర–8, ధనము: ఖ–0, ఖ–0, రస–6, సోములు–1 అంటే 1600. అయితే దాని గచ్ఛను కనుక్కోండి. ఇక్కడ a=4, d=8, S=1600 అయితే n ఎంత?

$$n = \left\{\frac{\sqrt{(2a-d)^2 8dS}+d}{2} - a\right\} \div d$$ సూత్రం ప్రకారం

$$n = \left\{\frac{\sqrt{(8-8)+8\times 8\times 1600}+8}{2} - 4\right\} \div 8$$

$$= \frac{160}{8} = 20$$

క. **ఆది పదమూఁడు నుత్తర**
మాదటఁ దానక్షి సంఖ్యయగు గగనంబున్
వేదములు శరములు ధనం
బాదరమున గచ్ఛయెంతయగు గణితజ్ఞా! 15

ఆది ౧౩ ఉత్తరము ౨ ధనము ౫౪౦ గచ్ఛ ౧౮.

ఆది–13, ఉత్తర– అక్షి –2, అంటే a=13, d=2 ధనము: గగనం–0, వేదములు–4, శరములు–5 అంటే S=540. అయితే గచ్ఛ ఎంత?

$$n = \left\{\frac{\sqrt{(2a-d)^2+8ds}+d}{2} - a\right\} \div d$$ సూత్రం ప్రకారం

$$= \left\{\frac{\sqrt{(2\times 13-2)^2+8\times 2\times 540}+2}{2} - 13\right\} \div 2$$

$$= \left\{\frac{96+2}{2} - 13\right\} \div 2$$

$$= \left\{\frac{98}{2} - 13\right\} \div 2$$

$$= (49-13) \div 2 \rightarrow \frac{36}{2} = 18$$

వ. ఇంక సంకలితోత్తరానయన సూత్రం బెట్టిదనిన,

ఆ. ఆదిగచ్ఛఁబెంచి యర్థంబులోఁబుచ్చి
[1]గచ్ఛదళము చేతఁ గదుభజించి
తత్ఫలంబు నొకఁడు దరగిన గచ్ఛఁబా
ల్గొన్న నుత్తరంబుకొలఁది వచ్చు.[2] **16**

ఇది సంకలితోత్తరాయన సూత్రం – ఉత్తరను కనుగొనేందుకు ఆదితో గచ్ఛను పెంచి, ధనము నుండి తీసివేసి గచ్ఛలో సగంతో భాగించి, దాని ఫలానికి ఒకటి తగ్గించి గచ్ఛతో భాగిస్తే ఉత్తర లభిస్తుంది.

---

(1) వానిక్రింద గచ్ఛ యూనమైన। గచ్ఛ కృతిదళంబు కదియంగ నిడిపాలు।గో ఉత్తరానయనసూత్రవివరణము.

ఆది ౨ ఉత్తర ? గచ్ఛ ౧౦ ధనము ౧౧౦

$$\text{ఉత్తర} = \frac{\dfrac{\left\{\begin{matrix}\text{అర్థంబు} & \text{ఆది} & \text{గచ్ఛ} \\ ౧౧౦ & -(౨ \times & ౧౦)\end{matrix}\right\}}{\text{౫ గచ్ఛదళము}}}{\text{(౧౦-౧)=౯ ఒకడు దరగినగచ్ఛ}} = \frac{\dfrac{౧౧౦-౨౦}{౫}}{౯} = \frac{\dfrac{౯౦}{౫}}{౯} = \frac{౧౮}{౯} = ౨$$

(2) ఇది గుణించేలక్షణం.

ఆది గచ్ఛను గుణించి అది ధనరాశిలో దీసి గచ్ఛ వర్గువుచేసి ఆరాశిలో సహాజ గచ్ఛదీసి మిగిలినది సగముచేసి అది ధనరాశికింద బెట్టి భాగిస్తేను ఉత్తరవచ్చును

ఆది ౨, గచ్ఛ ౧౦, ధనము ౧౧. ఉత్తర ౨. లబ్ధోత్తర ౨

ఈ పద్ధతివేఱు. ఇదీ పాఠాంతరమును బట్టియున్నది.

$$\frac{౧౧౦ - ౨ \times ౧౦}{\dfrac{(౧౦^{౨} - ౧౦)}{౨}} = \frac{౧౧౦ - ౨౦}{\dfrac{౧౦౦ - ౧౦}{౨}} = \frac{౯౦}{\dfrac{౯౦}{౨}} = \frac{౯౦}{౪౫} = ౨$$

ఉదాహరణకు; ఆది a=2, గచ్ఛ n=10, ధనము S=155 అనుకొందాము – ఈ దత్తాంశంతో ఉత్తర d ని కనుక్కోవాలి.

మల్లన చెప్పినట్లు గచ్ఛ 10ని ఆదితో బెంచాలి→10×2=20 దీనిని ధనము 155 నుండి తీసివేస్తే 155×20=135 వస్తుంది. ఈ ఫలాన్ని గచ్ఛదళం (గచ్ఛలో సగం)తో అంటే $\frac{10}{2} = 5$ తో భాగించినప్పుడు $\frac{135}{5} = 27$ వస్తుంది.

ఒకటి తరిగిన గచ్ఛ అంటే 10−1=9తో భాగిస్తే అంటే 27÷9=3 ఉత్తర లభిస్తుంది.

గమనిక : ప్రధానసూత్రం $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ నుండి dని రాబట్టవలె.

$$\frac{2S}{n} = 2a + (n-1)d$$

$$\frac{2S - 2an}{n} = (n-1)d$$

$$(S - an) \div \frac{n}{2} = (n-1)d$$

$$\therefore d = \frac{(S - an) \div \frac{n}{2}}{n-1}$$

ఈ సూత్రంలో S=135, n=10, a=2 ప్రతిక్షేపించి, సూక్ష్మీకరిస్తే d=3 లభిస్తుంది.

క. పురసంఖ్యయాది షోడశ
పరిమితమగు గచ్ఛ ధనము పరికింపంగా
గిరివేదతర్కమానము
తిరమగు తత్ప్రచయ మెంత తెల్పుము గణకా. **17**

ఆది 3 **గచ్ఛ** ౧౬ **ధనము** ౬౪౮ **ఉత్తరము** ౫.

ఆది=పురసంఖ్య–3, గచ్ఛ=షోడశము–16, ధనము : గిరి–7, వేద–4, తర్క–6, కాబట్టి 647 అయితే ఉత్తర ఎంత?

$$d = \frac{(647 - 3 \times 16) \div \frac{16}{2}}{15}$$ = పూర్ణాంకంరాదు. ధనం 648 అయితే పూర్ణాంకం 5 గా ఉత్తర లభిస్తుంది.

గమనిక : పద్యంలో మూడో పాదప్రారంభంలో గిరికి బదులు కరి ఉంటే సరి.

క. త్రిక మాది గచ్ఛ ముప్పది
యొకండు గనుఁగొనఁగ ధనము నొనరంగాఁ బా
వక వారణాష్టకరములు
ప్రకటంబగు ప్రచయ మెంత పలుకుము గణకా. 18

ఆది ౩ గచ్ఛ ౩౧ ధనము ౨౮౮౩ ఉత్తరము ౬.

ఆది=3, గచ్ఛ=31, ధనము=పావక–3, వారణ–8, అష్ట–8, కరములు–2 అంటే 2883 అయితే ఉత్తర ఎంత?

సూత్రం $d = \left\{(S - an) \div \frac{n}{2}\right\} \div (n-1)$ లో S=2883, n=31, a=3 ప్రతిక్షేపించండి.

$$d = \left\{(2883 - 31 \times 3) \div \frac{31}{2}\right\} \div 30 = 6$$

క. ఒకఁడాది గచ్ఛ శతకము
ప్రకటితముగఁ గన్న ధనము పదివేలయ్యెన్
సకలజనస్తుత యుత్తర
నికరంబదియెంతవచ్చు నిజముగమాకున్. 19

ఆది ౧ గచ్ఛ ౧౦౦ ధనము ౧౦౦౦౦ ఉత్తరము ౨.

ఆది=1, గచ్ఛ–శతకము=31, ధనము–10,000, అయితే ఉత్తర ఎంత?

ఉత్తర $d = \left\{(S - an) \div \frac{n}{2}\right\} \div (n-1)$ లో

S=10,000, n=100, a=1 ప్రతిక్షేపించండి.

$$d = \left\{(10000 - 100 \times 1) \div \frac{100}{2}\right\} \div 99 = 2$$

ఇంక సంకలితాద్యా నయన సూత్రం బెట్టి దనిన,

క. ఏకోన గచ్ఛదళితముఁ
బ్రాకట గచ్ఛోత్తరములఁ బ్రగుణించి ధనా
నీకమునఁబుచ్చి గచ్ఛను
జేకొని పాల్గొన్న నాదిసిద్ధమువచ్చున్. 20

[1]ఉత్తరము ౧ గచ్ఛ ౧౦ ధనము ౫౫ ఆది ౧.

ఇది ఆదిని కనుక్కోడానికి సూత్రం

ఒకటి తీసివేసిన గచ్ఛదళమును, గచ్ఛతో, ఉత్తరములతో గుణించి ధనము నుండి తీసివేసి గచ్ఛతో భాగిస్తే ఆది వస్తుంది.

సూత్రరూపంలో $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ నుండి a ను రాబట్టవలె.

---

(1) ఆది గుణించేలక్షణం.

గచ్ఛలోను ఒకటితీసి అది సగము చేసేది. గచ్ఛనున్ను, ఉత్తరనున్ను ఆ సగం గుణించేది. అది ధనరాశిలో దీసి ఆనిలిచిన ధనరాశి గచ్ఛచేత భాగిస్తేను వచ్చినది ఆది.

ఆది ౦ ఉత్తర ౮ గచ్ఛ ౧౭ ధనం ౧౧౩౯ లబ్ధాది 3.

సంకలితాద్యానయన సూత్ర వివరణము.

ఆది ? ఉత్తర ౧ గచ్ఛ ౧౦ ధనము ౫౫

$$\text{ఆది} = \frac{\underset{\text{ధనము}}{౫౫} - \left\{\dfrac{(\overset{\text{గచ్ఛ}}{౧౦} - \overset{\text{ఏకము}}{౧}) \times \overset{\text{గచ్ఛ}}{౧౦} \times \overset{\text{ఉత్త}}{౧}}{\text{౨ అర్ధించుట}}\right\}}{\text{౧౦ గచ్ఛ}}$$

(ఏకోనగచ్ఛ)

$$౫౫ - \left(\frac{౯}{౨} \times ౧౦\right) = ౫౫ - ౪౫ = ౧౦ ; \quad \frac{౧౦}{౧౦} = ౧ ; \text{ ఆది}$$

క. ఉత్తరము మూఁడు గచ్ఛ ద
శోత్తరపంచకము బాణ ముదధిగుణంబుల్
విత్తమగు నాది యేదీ
యుత్తమగుణనిలయ చెప్పుమొనరఁగ మాకున్[1]. 21

ఉత్తరము ౩ **గచ్ఛ** ౧౫ **ధనము** ౩౪౫ **ఆది** ౨.

సూత్రం ద్వారా $2a + (n-1) = \frac{2S}{n}$

కాబట్టి $2a = \frac{2S}{n} - (n-1)d$

$$\therefore a = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)}{2}d$$

$$= \left\{S - \frac{(n-1)nd}{2}\right\} \div n$$

ఉదాహరణం :

ఉత్తర= d =1, గచ్ఛ= n =10, ధనం S =55, అయితే

ఆది $= \left\{55 - \frac{9 \times 10 \times 1}{2}\right\} \div 10$

$= 1$

క. అనవద్యమైన యుత్తర
మెనిమిదియును గచ్ఛ ముప్పదేనును నర్థం
బును శరరసగజజలధులు
ఘనముగ నందాదియెంత గణితవిధిజ్ఞా. 22

ఆది ? ఉత్తరము ౮ **గచ్ఛ** ౩౫ **ధనము** ౪౮౬౫ **లబ్ధాది** ౪.

(1) వివరణము.

ఆది? ఉత్తర ౩ గచ్ఛ ౧౫ ధనము ౩౪౫. ఇది గుణించే విధానము. గచ్ఛ ౧౫లో ఒకటి తీసివేస్తేను ౧౪ ఈ లెక్క ఆర్ధిస్తేను ౭ ఇవి పదిహేనుచేత గుణించగాను ౧౦౫ ఇవి ఉత్తరం ౩ చేత గుణిస్తేను ౩౧౫ ఈ లెక్క ౩౪౫లో తీసివేస్తేను ౩౦ ఈ లెక్క గచ్ఛ ౧౫ పాలుగొనగా ఆది ౨.

ఉత్తర–8, గచ్ఛ–35, ధనం: శర–5. రస–6, గజ–8, జలధులు 4 అంటే 4865 అయితే ఆది ఎంత?

సూత్రం $a = \left\{S - \frac{(n-1)nd}{2}\right\} \div n$ లో

S=4865, n=35, d=8 ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించింది.

ఆది $a = \left\{4865 - \frac{34 \times 35 \times 8}{2}\right\} \div 35 = 3$

క. శరసంఖ్య యుత్తరము సుర
పరిమితమగు గచ్ఛధనము పక్షమహీభృ
త్తురగాక్షిసంఖ్య దీనికి
నరయంగా నాది యెంతయగు గణితజ్ఞా. 23

ఆది? ఉత్తరము ౫ **గచ్ఛ** ౩౩ **ధనము** ౨౭౭౨ **లబ్ధాది** ౪

ఉత్తర – శరసంఖ్య – 5

గచ్ఛ – సురపరిమితము – 33

ధనము: పక్ష–2, మహీభృత్–7, తురగ–7, అక్షి–2, కాబట్టి సంఖ్య 2772 –

ఇపుడు ఆది ఎంత?

సూత్రం $a = \left\{S - \frac{(n-1)nd}{2}\right\} \div n$

S =2772, n =33, d =5, ప్రతిక్షేపించండి

$$a = \left\{2772 - \frac{32 \times 33 \times 5}{2}\right\} \div 33$$
$$= (2772 - 2640) \div 33$$
$$= 132 \div 33$$
$$= 4$$

వ. అందు సంకలితాద్యుత్తరగచ్ఛానయన సూత్రంబెట్టిదనిన,

ఆ. [1]ఇచ్ఛధనమురెట్టి గచ్ఛచేఁ బాల్గొని
ద్విగుణితాదిచేతఁదీసివేసి
గచ్ఛ లబ్ధిఁదీసి కడలబ్ధిఁ బాల్గొన
నుత్తరంబు దాన నుప్పతిల్లు. (?) **24**

సంకలిత ఆది, ఉత్తర, గచ్ఛ ఆనయన సూత్రం. ధనము, ఆది, ఉత్తర, గచ్ఛల ఈ నాలుగు అంశాలను కలిపిన సూత్రం మనకు తెలుసు. వీటిలో ఏమూడు అంశాలు తెలిసికొని తెలియని నాలుగో అంశాన్ని రాబట్టడం మనం ఇంతవరకు నేర్చుకొన్నాం. ఇప్పుడు ఒకే ఒక అంశం –

---

1. పాఠాంతరము:

ఆ॥ ధనము వలను సంఖ్యఁ గొనుమది గచ్ఛయై
వచ్చు లబ్ధి తనకు వలసెనేని
పుచ్చు నా విశేషముననైన గచ్ఛార్ధ

ఆద్యుత్తరగచ్ఛానయన సూత్రవివరణము:
ఇందుకు గుణకం.

ఒరులు చెప్పినధనము ౩౯౯. ఈధనమునకురెట్టి ౭౯౮. ఈగచ్ఛభాగహారము. ౭౯౮” సరివచ్చిన గచ్ఛ భాగమే ౧౧౪కు. గచ్ఛ ఒకటితియ్యను ౬. ఈ ఆరింటను ఆ గచ్ఛభాగం ౧౧౪ను భాగమెత్తగా వచ్చినలబ్ధమే ఉత్తరము ౧౮. భాగహారానకు వచ్చినవి ౧౧౪న్ను, అభాగహారశేషము ౧౦౮ (గన్కపోగా) నంమలయర్ధమే యాది

గన్క ఒన్ను – ఇచ్చు ధనానందెచ్చిన ప్రతులు ౩కి ఆది ౩ ఉత్త – ౧౮ గచ్ఛ ౭ ధనము ౩౯౯

సరిచూచుట –

ఈ గచ్ఛలోను ఒకటి తియ్యను ఆఋ. ఈ ఉత్తరము ౧౮న్ని ఈ రెంటిగుణకమును ౭ ౧౦౮ అదివెట్టి యీ రాశిగలియ ౯ వెరశి యీరెండున్ను ౧౧౪ గచ్ఛ రాశి ఈ రెండుగుణకమున్ను ౭౯౮ ఇందుకు అర్ధమే ధనము ౩౯౮. మున్నూటతొంబైతొమ్మిది గనక యెఱిగేది.

పదియునొకడు.

ధనం ఇచ్చినప్పుడు దాని కనుగుణంగా మిగతా మూడు అంశాలను రాబట్టడం చూద్దాం. ఈ అభ్యాసానికి గణితసూత్రాలు లేవు. అంతర్బుద్ధిని ఉపయోగించి, సాధనలు ఊహించాలి. “ఇక్కడ సంకలితం తప్ప వేరేమీలేదు. దాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని a,d,n లను తగువిధంగా నిర్ణయించి ఒక ఊహా శ్రేఢిని రూపొందించడం ఈ సూత్రంలో విశేషం” ఇట్లాంటి సమస్యలకు సాధనలనేకం ఉంటాయి. (తి.తి.దే ప్రతిలో పుట 74తో 24,25 పద్యాల తరువాత)

ఆ. ఉత్తరంబు పాలు నొగిమిగు లర్ధింప
నదియు నాదిగాగ నమర నిలిచె
నుత్తరాది గచ్ఛ లొనరఁగా నున్నల
వానివానిలెక్క వరుస నిలుపు. **25**

ఇచ్చిన ధనమును రెట్టింపుజేసి, గచ్ఛలో భాగించి ద్విగుణాదిగా తీసివేసి గచ్ఛలో వచ్చిన లబ్ధిని తీసి చివరలబ్ధిని భాగిస్తే ఉత్తరను రాబట్టవచ్చు.

ప్రధానసూత్రం $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

గనక $d = \left(\frac{2S}{n} - 2a\right) \div (n-1)$

$$2a = \frac{2S}{n} - (n-1)d$$

సమీకరణాలు (2) & (3)లను అనుగుణంగా ఆయా విలువలను ఎంపికచేసి ఉత్తర అంటే d ని కనుక్కోవచ్చు.

గమనిక: పైరెండు పద్యాలలో స్పష్టత కానరాదు.

మొదటి పద్యం ద్వారా (2) లభిస్తుంది – అయితే ఇందులో మూడోపాదం “గచ్ఛలబ్ధిదీసి కడలబ్ధిపాల్గొన” అన్నదానికి బదులుగా “గచ్ఛనొకడు” తీసి కడలబ్ధిపాల్గొన అంటే సూత్రం (2) నిష్పన్నమౌతుందని మనోరంజనీ వ్యాఖ్యలో విద్వాన్ తెన్నేటి రాశారు. బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారు ఇచ్చిన సూత్రవివరణ చూడండి.

ఆ. హృద్యమున నొకఁడు వడసిన
గద్యానము లంబరాక్షిగతినయనములన్
బ్రద్యోతితమగు దీనికి
నాద్యుత్తరగచ్ఛ లెంత యగు గణితజ్ఞా! 26

ఆది ? ఉత్తర ? గచ్ఛ ? ధనము ౨౪౨౦ లబ్ధాది ౨ లబ్ధోత్తరము ౩ లబ్ధగచ్ఛ ౪౦

అంబర–0, అక్షి–2, గతి–4, నయనములు–2 అంటే 2420 ధనం (బంగారుకాసులు) ఉన్నట్లయితే దీనికితగ్గట్టు ఆది, ఉత్తర, గచ్ఛలెంత?

ఈ సమస్యకు ఉపయోగించవలసిన సూత్రరూపాలు

$$d = \left(\frac{2S}{n} - 2a\right) \div (n-1) \quad (1)$$

$$2a = \frac{2S}{n} - (n-1)d \quad (2)$$

$$n = \left\{\frac{\sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2} + d - 2a\right\} \div 2d \quad (3)$$

$$n = \left\{\frac{\sqrt{(2a-d)^2 + 8ds} + d}{2} - a\right\} \div d$$

(1)లో nను పెద్దసంఖ్యగా, dని చిన్నదిగా ఎంపిక చేసుకోవడం వాంఛనీయం. గచ్ఛ n చేత s భాగించాలి నిశ్శేషంగా. అంటే s కు n ఒక కారణాంకంగా ఉండాలి. లవం (n-1)కు గుణిజం అయ్యేటట్లు చూడాలి. ఇప్పుడు n=40, a=2 అనుకొని ప్రయత్నిద్దాం. (ఇది ప్రయత్న–దోషపద్ధతి Trial and error method)

$$d = \left\{\frac{2 \times 2420}{40} - 2 \times 2\right\} \div 39$$

$$= (121 - 4) \div 39 = 3$$

ఇప్పుడు a=2, d=3 కాబట్టి, శ్రేఢియొక్క కడపటి పదం l = a+(n-1)d=d =2×39×3=2+117=119 ఈ a=2, d=3లతో ఏర్పడే అంకశ్రేఢి 2+5+8+11+.......119 (పదాలు 40)

దీని సకలితం $= \frac{n}{2}(a+l) = \frac{40}{2}(2+119) = 2420$

కాబట్టి ఆది=2, ఉత్తర=3, గచ్ఛ=40

గమనిక: ఇదివరలో సూచించినట్లు ఇట్లాంటి సమస్యలకు సాధనలు అనేకం. పైన ఒక సాధన చూచాము. ఈ సాధన రాబట్టడానికి మనం a=2, n=40 అని ప్రారభించాము.

మరోసాధన: a=5, n=11 అని ప్రారంభించండి d=43

ఇట్లాగే a=5, n=20 అని ప్రారంభించి d=12 అని రాబట్టవచ్చు (మనోరంజనీ వ్యాఖ్య).

క. మున్నూటఱునది యొక్కటి
పన్నుగ నొక్కండు గొన్న భర్మములయినం
సన్నుత లియ్యాద్యుత్తర
మున్నెఱయఁగ గచ్ఛఁ జెప్పు ముదమున మాకున్ 27

ఆది ? ఉత్తర ? గచ్ఛ ? ధనము ౩౬౧ లబ్ధాది ౧ లబ్ధోత్తర ౨ లబ్ధగచ్ఛ ౧౯

ఒకని సంకలనం 361 బంగారు నాణాలు అయితే ఆది, ఉత్తర, గచ్ఛలెన్ని?

ఇక్కడ s=361 కలిగిన ఒక అంకశ్రేఢిని కనుక్కోవాలి. 1 నుండి 19 బేసి సంఖ్యల మొత్తం 19^2=361 అన్న ఫలితాన్ని ఉపయోగించుకోవాలి.

$\therefore S = 1 + 3 + 5 + \cdots 19$ పదాలు

$\therefore S = 361$ కాబట్టి $a = 1, n = 19, d = 2$

క. [1]ఏకాదశశతకనకా
నీకం బొకరుండు పడసె నిజముగ వానిన్
వీకను నాద్యుత్తరగ
చ్ఛాకారము లెఱుఁగఁ జెప్పుమా గణితజ్ఞా! 28

ఆది ? ఉత్తర ? గచ్ఛ ? ధనము ౧౧౦౦ **లబ్ధాది** ౮ **లబ్ధోత్తర** ౩ **లబ్ధగచ్ఛ** ౨౫

s=1100 అయ్యేందుకు అనుగుణమైన a,d,nలు కనుక్కోవాలి. ఇదివరకటి సమస్యలలో సాధించినట్లు – ప్రయత్నదోషపద్ధతి ద్వారా ఆది=8, ఉత్తర=3, గచ్ఛ=25 అని ఒక సాధన ఉన్నది.

క. [2]పరగగ శశిర సవారణ
పుర సంఖ్యలమణులు దేవపూజార్థముగా
విరచించె నొక్కఁడాద్యు
త్తరగచ్ఛలఁ జెప్పుమతి ముదంబున మాకున్. 29

ఆది ? ఉత్తర ? గచ్ఛ ? ధనము ౩౮౬౧ **లబ్ధాది** ౫ **లబ్ధోత్తర** ౭ **లబ్ధగచ్ఛ** ౩౩

---

1. పద్దకొండునూర్లు (భర్మముల్వణిజుఁడు)
విప్రతతులకిచ్చె వేడ్కతోడ
దాన మేర్పరింప దీసియాద్యుత్తర
గచ్ఛ లెంతసెప్పు గణకతిలక!

2. పరగఁగ శశిరసవారణ
పురసంఖ్యకు ధనమురాశి పురుణింపఁగ నొ
క్కరుఁ డర్థిఁ బడసె నాద్యు
తరగచ్ఛలు దీనికెంక తగఁ జెప్పు మిలన్.

శశి=1, రస–6, వారణ–8, పుర–3. కాబట్టి దేవపూజార్థమై ప్రోవుచేసిన మణులసంఖ్య=3861 దీనికి అనుగుణమైన ఒక సాధన ఆది=5, ఉత్తర=7, గచ్ఛ=33. ఉంటుంది.

క. సరసిజ భవగిరిరసఋతు
పరిమితమగుధనము, తేటపడనందా ద్యు
త్తరగచ్ఛ లెఱుఁగవలయును
దిరముగ నవి యెన్ని చెప్పు ధీరగుణాఢ్యా! 30

ఆది ? ఉత్తర ? గచ్ఛ ? ధనము ౬౬౭౯౫ **లబ్ధాది** ౧ **లబ్ధోత్తర** ౧ **లబ్ధగచ్ఛ** ౩౬౫

ధనము: సరసిజభవ–9, గిరి–7, రస–6, ఋతు–6 కాబట్టి ధనం=6679 అయితే ఆది, ఉత్తర, గచ్ఛలెంత? 6679 ఒక ప్రధానసంఖ్య (Prime Number). దీనిని ఏ యితర పూర్ణసంఖ్య భాగించదు. ఇట్టి సంఖ్య sగా a,d,nలను పూర్ణాంకాలలో రాబట్టలేము. బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారు దీనిని గుర్తించి అనులేసుకొన్నాము.

కాబట్టి sను 66795గా ఉత్పన్నం చేయడానికి దత్తపద్యంలో మొదటి పాదాన్ని మార్చాలి.

సరసిజభవ, గిరి, రస, ఋతు "స్థానేశర కమలజ గిరి రస, ఋతు" రాసుకుంటే ధనం 66795 అవుతుంది. (మనోరంజనీవ్యాఖ్య).

ఈ ధనంతో– "ప్రయత్న–దోషపద్ధతి ప్రకారం" ఒక సాధన a=1, d=1, n=365.

వ. ఇంక సంకలితముతోడ సమగచ్ఛను దృష్టధనాద్యుత్తరేష్ట ధనాద్యుత్తరాన యనసూత్ర మెట్టిదనిన,

అంకశ్రేఢి సంకలితం s, a, d లు ఆది, ఉత్తరలు దృష్టములైనప్పుడు (దత్తాంశాలు), ఆ సంకలితాన్ని కొన్నిరెట్లు చేస్తే మరో సంకలితం ఇష్ట

సంకలితం దానితోపాటు మరో అంకశ్రేఢి రూపొందుతుంది. ఈ కొత్త సంకలితం s అందాము. తదనుగుణంగా ఆది A ఉత్తర Dలను ఎట్లాకనుక్కోవాలో వివరించే సూత్రమిది రెండుశ్రేఢులలో గచ్ఛ n దీనిలో మార్పులేదు, దీనిలో అంతర్లీనంగా ఉన్న గణితసూత్రం: ఒకే nకు రెండు సంకలితాలుంటే, ధనము, ఆది, ఉత్తరలు అనుపాతంలో ఉంటాయి. అంటే $\frac{s}{S} = \frac{a}{A} = \frac{d}{D}$

క. దృష్టధనముచేఁ బాలుగ
నిష్టధనంబు గొని లబ్ధినిడి వేఱుగఁ ద
ద్దృష్టాద్యుత్తరహతమై
[1]యిష్టాద్యుత్తరము లధికహేమంబులగున్. 31

దృష్టధనంచేత ఇష్టధనం నుండి పాలుగొని వచ్చిన లబ్ధాన్ని తీసుకొని సంకలితుని ఆదిని గుణిస్తే ఇష్టుని ఆది లభిస్తుంది. ఆ వెనకటి లబ్ధంతో సంకలితుని ఉత్తరను గుణిస్తే ఇష్టుని ఉత్తర లభిస్తుంది. ఈ పద్ధతిని ఉదాహరణతో వివరిస్తాం.

ఒకే గచ్ఛ (=n)తో రెండు సంకలితాలు=దృష్ట సంకలితం, ఇష్టసంకలితం ఉండాలి.

దృష్టసంకలితం

దృష్ట అంకశ్రేఢి 3+5+7+9+11+13+15 అనుకోండి.

n=7, a=3, s=63

ఇష్ట అంకశ్రేఢి సంకలితం 189 : దీని ఆది, ఉత్తరలు చెప్పాలి.

1. ఇందుటీక : ఇష్టధనముబెట్టి సంకలితుని ధనంచేతను పాలుగొనగాను, వచ్చినలబ్ధం చేతను సంకలితుని ఆదిగుణిస్తేను యిష్టునిఆదివచ్చును. ఆమునుపటిలబ్ధం చేతను సంకలితుని ఉత్తర గుణిస్తేను యిష్టుని ఉత్తరవచ్చును.

ఇప్పుడు $\frac{S}{s} = \frac{189}{63} = 3$ కాబట్టి దృష్ట ఆది, ఉత్తరలను మూడింతలు చేస్తే చాలు.

అంటే A = 3×3=9

D = 2×3=6.

కాబట్టి ఇష్ట అంకశ్రేఢి: 9+15+21+27+33+39+45

$\therefore S = 189$

క. [1]మొదలొకఁ డుత్తర యెనిమిది
పదియాఱును గచ్ఛ తర్కపర్వతనిధులన్
విదితమగు ధనము నిష్టం
బది ద్విగుణము సెప్పు వాని యాద్యుత్తరముల్. 32

సంకలితాది ౧ ఉత్తరము ౮ గచ్ఛ ౧౬ ధనము ౯౭౬ ఇష్టధనము ౧౯౫౨ గచ్ఛ ౧౬ ఇష్టాది ౦ ఉత్తర ౦ లబ్ధాది ౨ లబ్ధోత్తరం ౧౬[1].

ఆది=1, ఉత్తర=8, గచ్ఛ=16

ధనము: తర్క–6, పర్వత–7, నిధి–9, కాబట్టి 976. దీనికి ద్విగుణం ఇష్టధనము – అంటే 976×2=1952. అయితే ఇష్టధన ఆది, ఉత్తరలను చెప్పండి.

ఇష్ట సంకలితాది= 1×2=2, ఇష్ట ఉత్తర=8×2=16.

1. ఇది గుణించే లక్షణం:- సంకలితుని ధనం ౯౭౬న్ను ఉత్కలితుని ధనం ౧౯౫౨కిందను బెట్టి పాలుగొంటేను వచ్చిన లబ్ధం ౨ ఆయెను సంకలితుని అది ౧న్ని రెంటికిందను గుణిస్తేను ౨ ఆయెను. అది ఉత్కలితుని ఆదిఆయెను. ఆరెండున్ను సంకలితుని ఉత్తర ౮ పెట్టి గుణిస్తేను ౧౬ ఆయెను. ఆ ౧౬ ఇష్టుని ఉత్తర ఆయెను.

క. కరిసంఖ్య యాది యొకఁడు
తరమని పదమూఁడు గచ్ఛ ధనమున్ బక్ష
ద్విరదేందుసంఖ్య యిష్టం
బరయఁగఁ దత్త్రిగుణ మెంత యాద్యుత్తరముల్.

క. మొదలొకఁడు మూఁడు ప్రచయము
పదమూఁడగు గచ్ఛ ధనము పర్వతగతిదృ
గ్విదితము నిష్టము త్రిగుణము
బదమూఁడగు గచ్ఛయెంత ప్రభవోత్తరముల్. 33

ఆది ౧ **ఉత్తరము** ౩ **గచ్ఛ** ౧౩ **ధనము** ౨౪౭ **ఇష్టధనము** ౭౪౧ **గచ్ఛ** ౧౩ **లబ్ధాది** ౩ **ఉత్తర** ౯.

ఆది=1, ఉత్తర=8, గచ్ఛ=13

ధనము: పర్వత-7, గతి-4, దృక్-2 అంటే 247 ఇష్టధనము త్రిగుణము అంటే 247×3=741. ఇష్టనమూనాకూ గచ్ఛ 13, ఇపుడు దీని ఆది A, ఉత్తర Dలు?

A = a×3=3

D = d×3=9.

గీ. [1]ఆది మూఁడుత్తరం బొకఁ డబ్ధిచంద్ర
పరిమితము గచ్ఛ ధన మగ్ని పురశశాంక
సంఖ్య యిచ్ఛాధనంబును జలధి శశుల
నమరు దీనికి నాద్యుత్తరములు చెపుమ. 34

ఆది ౩ **ఉత్తరము** ౧ **గచ్ఛ** ౧౪ **ధనము** ౧౩౩ **ఇష్టధనము** ౭౪౧ **ఇచ్ఛాధనము** ౧౪ **లబ్ధాది** ౬/౧౯ **ఉ** ౨/౧౯ **గ** ౧౪.

ఆది=3, ఉత్తర=1, గచ్ఛ→అబ్ధి-4, చంద్ర-1 పరిమితము అంటే 14

s=ధనము: అగ్ని-3, పుర-3, శశాంక-1 గనక 133

S=ఇష్టధనము జలధి-4, శశి-1 అంటే 14

---

1. దీనికి బదులు

క. మొదలు త్రిక, ముత్తరం బొకఁ। డుదధీందులు గచ్ఛ, కరణ హుతవహచంద్రుల్
కదియంగ ధనము నిష్టంబది । రెట్టి యెఱుంగు దీని యాద్యుత్తరముల్॥

$$\frac{S}{s}=\frac{A}{a} \text{ గనక } A=\frac{S}{s}a=\frac{14}{133}\times 3=\frac{2}{19}\times 3=\frac{6}{19}$$

అట్లాగే $D=\frac{S}{s}\times d=\frac{14}{133}\times 1=\frac{2}{19}$

ఈ అంకశ్రేఢి భిన్నాలతో ఏర్పడినది $\therefore A=\frac{6}{19}, D=\frac{2}{19}$

క. మొదలును బ్రచయము రెండగుఁ
బదమూఁడగు గచ్ఛ ధనము పక్షాష్టశశుల్
బదమూఁ డిచ్ఛాధనముం
గదియఁగ నాద్యుత్తరములు గణక! తెలుపుమా! 35

ఆది ౨ **ఉత్తరము** ౨ **గచ్ఛ** ౧౩ **ధనము** ౧౮౨ **ఇచ్ఛాధనము** ౧౩ **లబ్ధాది** ౧/౭ **ఉత్తర** ౧/౭ **గచ్ఛ** ౧౩.

ఆది=2, ఉత్తర=2, గచ్ఛ =13

s=ధనము: పక్ష-2, అష్ట-8, శశి-1 అంటే 182

S=ఇష్టధనము 13

$\frac{S}{s}=\frac{13}{182}=\frac{1}{14}$ ఇప్పుడు $\frac{S}{s}=\frac{A}{a}=\frac{D}{d}$

గనక $A=\frac{S}{s}a=\frac{1}{14}\times 2=\frac{1}{7}$

$$D=\frac{S}{s}d=\frac{1}{14}\times 2=\frac{1}{7}$$

గచ్ఛ: దత్తాంశం ప్రకారం 13

వ. గుణసంకలిత సూత్రము.

అంకశ్రేఢి (Arithmetic Progression)లో a ఆదిపదం, d ఉత్తర, పదాంతం కాబట్టి అంకశ్రేఢి రూపం

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots(a+\overline{n-1}d)+\cdots$$

గుణసంకలిత సూత్రంలో ఆదిపదం a, పదనిష్పత్తి లేదా పదానుపాతం స్థిరరాశి r అయితే శ్రేఢీరూపం

$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \ldots$ ఈ శ్రేఢిని నేడు బీజగణితంలో గుణశ్రేఢి (Geometric Progression) అంటారు.

అంకశ్రేఢిలో ఒక పదంనుండి దానివెనకటి పదం తీసి వేస్తే పదాంతరం d వస్తుంది. $(a + nd) - (a + \overline{n-1}d) = d$ గుణశ్రేఢిలో ఒక పదాన్ని దాని వెనుకటి పదంతో భాగిస్తే r వస్తుంది. $ar^n \div ar^{n-1} = r$ పదసంఖ్య n అయితే చివరి పదం ఈ rను గుణోత్తర అని కూడా వ్యవహరిస్తారు –

గమనిక : గుణశ్రేఢిని ప్రస్తావించిన మొట్టమొదటి గణితవేత్త మహావీరాచార్యుడు.

క. సమదళవిషమసురూపముఁ
గ్రమమున గుణగుణము వర్గఘాతము నేకో
నములైన గచ్ఛ యాదిగు
ణము శశిరహితోత్తరంబు [1]నం గొన ధనమున్. 36

ఈ శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తం కనుక్కోవడానికి కొంత శ్రమించాలి. ఈ శ్రమను తగ్గించి గణించడానికి ఒక పద్ధతిని వివరించాడు మల్లన. "సంవర్గ మానాలసాయంగాని, గణకయంత్రాల సౌకర్యంగాని లేనిరోజుల్లో ఈ సులువైన సూత్రం ఎంతో విలువైంది, ఆసక్తిదాయకమైంది కూడా"

ఆధునిక పద్ధతిలో

$$S = a + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

$$rs = \frac{ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n}{(2) - (1) \rightarrow S(r-1) = ar^n - a} \qquad (2)$$

1. నఁ గొనధనమగున్. ఇది యొక్క ప్రతి లోఁగలదు.

$$\therefore S = \frac{a(r^{n-1})}{(r-1)}$$

$r \neq 1$ అయినప్పుడు గుణశ్రేఢిలో n పదాలమొత్తం

$S = a(r^{n-1}) \div (r-1)$ ను చూచాయగా తెలపడం జరిగిందేమో ఈ కందపద్యంలో. పద్యంలో అస్పష్టత ఉన్నకారణం మరో సీసపద్యంలో కొంత వివరణనిచ్చాడు కవి. అయినా అస్పష్టత అస్పష్టతగానే మిగిలి పోయింది.

గమనిక 2 : గుణశ్రేఢిలో కీలకమైన గణనము r^n. దీన్ని గణిస్తే ధనమును రాబట్టవచ్చు–

కందపద్యంలోని భావం : (గొట్టుముక్కల సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రి) "సమభాగము, విషమభాగము క్రమముగా గుణ గుణమును (రెట్టింపును గుణించగా వచ్చు లబ్ధము) వర్గమును కాగా –

ఒకటి తరిగిన గచ్ఛ, ఆది, శశిరహిత ఉత్తరము (ఒకటి తరిగిన ఉత్తర)లతో లెక్కించిన ధనము వస్తుంది" – "సందిగ్ధభావమిది"

విద్వాన్ తెన్నేటి సుబ్బారావు తన మనోరంజనీ వ్యాఖ్యలో ఈ కింద ఉటంకించినవి రాసియున్నారు –

"r^n సాధించడానికి మల్లన చెప్పిన సూత్రం ఈ దిగువన సోదాహరణంగా ప్రదర్శింపబడింది. r=3అయితే n=12 అయితే.... ముందుగా 3^{12}ను కనుక్కోవలసి ఉంటుంది....ముందు ప్రస్తుత ఘాతాంకం (12) సరి, బేసి, ఏరకం సంఖ్యయో గుర్తించాలి. సరి అయితే సగం చేసుకోవాలి. బేసి అయితే ముందు ఒకటి తీసివేయాలి. సగాల ఎదురుగా "వ" (వర్గించడానికి సంకేతం) అనీ, (–1) ఎదురుగా "గు" (గుణించాలని సంకేతం) అనీ, రాసి పెట్టుకోవాలి. చివర సున్న ఎదురుగా r=3 రాయాలి.

ఇప్పుడు మన ఉదాహరణ 3^{12}లో 12 సంఖ్య కదా! దీనికి ఏర్పడే పట్టిక : 12లో

సగం	6	వ
సగం	3	వ
(−1)	2	గు
సగం	1	వ
(−1)	0	r=3

ఈ రాసుకున్న సంకేతాల ప్రకారం, అడుగునుంచి పైపైకి ప్రక్రియ నిర్వహిస్తూపోతే, ఆఖరి సోపానంలో $r^n=3^{12}$ ఫలిస్తుంది. పై పట్టిక కొనసాగింపు ఇలా ఉంటుంది.

వ	729^2	5,31,441
వ	27^2	729
గు	9×3	27
వ	3^2	9
0	3	3

ఈ విధంగా 3ను 12సార్లు గొలుసు గుణకారం చేయడానికి 11 పరిక్రియలు అవసరం. కాగా, ఇక్కడ కేవలం 4 పరిక్రియల్లోనే పని తీరిపోతున్నది.

మన ఒక్క కంద పద్యంలోనే ఈ గణనప్రక్రియ, దీన్నిబట్టి గుణశ్రేఢి, సంకలిత గణనం రెండూ ఒక్కుమ్మడిగా చెప్పాడు."

సీ. సమదళంబుల బొట్లు శశుల బేసుల నిల్పి
గచ్ఛ దా నేకాంతికంబు గాఁగ
విధులను వ్రాసి తద్విధులచే నొక్కట్లు
చెలువొప్ప నుత్తరచే గుణించి
తుదలెక్కనుండి బిందులకు వర్గ లొనర్చి
యగ్రస్థలుల లెక్కలమరెనేనిఁ

దద్వర్గవునఁ బెంచి తప్పకతేరినఁ
గుణితరాశిని శీతఘృణిని బుచ్చి

గీ. యాదిహతము చేసి యంతట శశిరహి
తోత్తరమునఁ గొనఁగ విత్తమయ్యె
గణకముఖ్యులార! గుణసంకలితమున
కేర్పఱించినాఁడ నెఁఱిగికొనుఁడు. 36

ఈ సీసపద్యంలోనూ స్పష్టత కానరాదు.

యథాతథంగా పద్యభావం. "సమభాగములకు సున్నలు, విషమ భాగములకు శశులు (ఒకట్లు) నిలిపి; గచ్ఛ ఒకటి కాగా (ఏకాంతికము) విధులను వ్రాసి (ఒకట్లనువేసి) వీటితో ఒకట్లుగా ఉన్న ఉత్తరను గుణించి, చివరి లెక్కనుండి సున్నాలను వర్గలు నిర్ణయించి, అగ్రస్థానాలలో లెక్కలమరితే వర్గనుపెంచి, తేలిన గుణితరాశి నుండి ఒకటిని తీసివేసి ఆదితో గుణించి ఒకటి తీసిన ఉత్తరతో కలుపగా – ధనమువచ్చును"

"ఇందులోని సంకేతముల ద్వారా కవి చెప్పదలచిన గణితార్థమేమి? అగమ్యగోచరం" – విద్వాన్ గొట్టుముక్కల సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రి వ్యాఖ్య.

అట్లాగే విద్వాన్ తెన్నేటివారి మనోరంజనీ వ్యాఖ్యలో "ఈ పద్యంలో సరి సంఖ్యలను చుక్కతోను (−1) ఎదుట నిలువుగీటుతోను గుర్తించుకోవాలని సూచించాడు. చివరకు వచ్చేఫలితం r^nలో 1 తీసివేసి (r^n-1)ను ఆది (a)తో గుణించి, ఒకటి తక్కువ పదాంతరం (r−1)తో భాగిస్తే గుణశ్రేఢి సంకలితం వస్తుందని సూత్రీకరించాడు.

అంటే $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$

ఉదాహరణ

క. విను మూఁడాది గుణోత్తర
మెనిమిదిగాఁ బట్టణంబు లేనింటి కిలన్

[1]జని యొకఁ డార్జించిన నా
ధనమది యెంతగును గణితతత్త్వవిధిజ్ఞా! 37

ఆది ౩ **ఉ** ౮ **గచ్ఛ** ౫ **లబ్ధసంకలితధనము** ౧౪౦౪౩

ఉదాహరణగా పేర్కొన్న పద్యంలోని సమస్యను పై పద్యంలో అనగా 36లో వివరించినట్లు అంశాలవారీగా పరికర్మలను కొనసాగించి సాధన రాబట్టలేదు –

ఇందులో a=3, r=8, n=5 అయితే గుణశ్రేఢి అంటే ఆది=3, గుణోత్తర=8, పట్టణములు అంటే గచ్ఛ=5 సంకలితం ఎంత?

$S = 3(8^5-1)\div(8-1)$

$=(3\times32768)\div7$

$= 3\times4681$

$= 14043$

గమనిక : మల్లన పేర్కొన్న విధానక్రమం వేరు

క. తగఁజేత రెండుగొనకొని
త్రిగుణోత్తర వృద్ధిగాఁగ [2]ద్రిమ్మతి వణిజుం
డొగినొక్కఁడు చని యెనిమిది
నగరంబులఁగన్న కాంచనం బెంతయగున్. 38

ఆది ౨ **ఉ** ౩ **గచ్ఛ** ౮ **లబ్ధసంకలితధనము** ౬౫౬౦

ఆది=2, త్రిగుణ=3, ఉత్తర, గచ్ఛ=8 అయితే కాంచనమెంత? ఆధునిక సంకేతాలతో a=2, r=3, n=8

$\therefore S = 2(3^8-1)\div(3-1)$

$= (3^8-1) = 6560$

1. జనియొక్కరుఁ డార్జించిన। ధనమది యెంతయగుఁ జెప్పుతగ గణితజ్ఞా!
2. దిగ్గజసంఖ్యన్। నెగడిన పురముల నొకరుఁడు। తగవాణిజమాడిగన్న ధనమెంతయగున్.

"మల్లన పేర్కొన్న విధాన క్రమం ప్రకారం :

గచ్ఛలో సగం	4	వ	6561	
సగం	2	వ	81	
సగం	1	వ	9	
−1	0	r=3	3"	(మనోరంజనీ వ్యాఖ్య)

గీ. మూఁడు మాడలు గొనిపోయి ముదముతోడఁ
[1]బంచగుణము త్తరముగాఁగఁ బట్టణములు
పంచదశసంఖ్య కరిగి యేర్చుడఁగ నొక్క
సెట్టి వడసిన ధనమెంత సెప్పు మాకుఁ. 39

ఆది ౩ **ఉ** ౫ **గచ్ఛ** ౧౫ **లబ్ధసంకలితధనము** ౨౨౮౮౮౧౮౩౫౯౩

ఒక వర్తకుడు 3 మాడలు గొనిపోయి, 15 పట్టణాలలో వ్యాపారం చేస్తూ, ఐదేసిరెట్లు వ్యాపారం పెంచుకుంటూ ఉన్నాడు. ఆసెట్టి ఎంత సంపాదించాడు?

ఆధునిక సంకేతాలతో a=3, r=5, n=15 అయితే s ఎంత?

$S = a(r^n-1)\div(r-1)$

$= 3(5^{15}-1)\div(5-1)$

$= 3\times\frac{30517578124}{4}$

$= 7629394531\times3 = 22888183593$

క. ఒక్కఁడు మొదలుగఁ గడపటి
లెక్కకు సంకలితరెట్టి లెక్కించినచో
నిక్కం బిరువది నాల్గిం
డ్లక్కజముగ ఫలములెన్నియగు గణితజ్ఞా! 40
ఆది ౧ **గు** ౨ **గ** ౨౪ **లబ్ధము** ౧౬౭౭౭౨౧౫

1. పంచక గుణోత్తరంబుగా.

ఒకటితో మొదలుపెట్టి రెట్టింపు చేస్తూ 24 సంఖ్యలు ఏర్పరిస్తే వాటి మొత్తం ఎంత? అంటే a=1, r=2, n=24 అయితే s ఎంత?

$s = (2^{24} - 1)$

$= 16777215.$

క. మొదలొకఁడు నిల్పి దానిం
గదియఁగఁ దుదిదాఁక రెట్టిగాఁ [1]జేసినచో
విదితముగఁ జెప్పు మాకును
జదరంగము నిండ్లకెంత సంఖ్యవిధిజ్ఞా! 41

మొదలు 1 ని నిలిపి దానివెంట తుదివరకు రెట్టింపుచేస్తూ చదరంగటిండ్లు అంటే 64 చదరాలలో పెట్టితే ఎంత అవుతుంది?అంటే a=1, r=2, n=64 అయితే s ఎంత?

$s = (2^{64} - 1)$

గమనిక : దీనికి సాధన మరుసటి పద్యంలో ఉన్నది.

చ. శరశశిషట్కచంద్ర శరసాయకరంధ్ర వియన్నగాగ్నిభూ
ధరగగనాబ్ధివేదగిరితర్కపయోనిధి పద్మజాస్యకుం
జరతుహినాంశుసంఖ్యకు నిజంబగు తచ్చతురంగగేహవి
సరమగురెట్టి రెట్టికగుసంకలితంబు జగత్ప్రసిద్ధికిన్. 42
౧౮౪౪౬౭౪౪౦౭౩౭౦౯౫౫౧౬౧౫

ఆరోపం 211లో వివిధ చదరాలలో ఉంచినది గింజలైతే (వడ్లగింజలనుకుందాం) వాటి మొత్తం గింజలు

$1+2+4+8+16+32+2^6+2^7+\ldots+2^{63}=S$

మల్లన Sను సంకేతాలతో సూచించాడు.

1. .... గూడినచో ।...........। జదరంగపుటిండ్ల కైనసంకలితమొగిన్

శర-5, శశి-1, షట్క-6, చంద్ర-1, శర-5, సాయక-5, రంధ్ర-9, వియత్-0, నగ-7, అగ్ని-3, భూధర-7, గగన-0, అబ్ధి-4, వేద-4, గిరి-7, తర్క-6, పయోనిధి-4, పద్మజాస్య-4, కుంజర-8, తుహినాంశు-1

ఈ సంఖ్య 18446744073709551615 - ఇన్ని వడ్లగింజల ధాన్యం.

యీగింజలు లెక్క చేయగానైనపుట్లు.

ఈ గింజలు లెక్కసేయగా వచ్చిన పుట్లు ఈ కింది పద్యంలో వివరించడమైనది.

చ. వరచతురంగగేహముల వడ్లను నిండ్లకు లెక్క సేయఁగా
శరనవఖేషుశైలఋతుసామజరంధ్ర నగాక్షి చంద్రమాం
బరరసచంద్రుల న్నెఱుఁ గఁ బడ్డవి యొడ్డగు నొక్కతూమెడుం
మరునిభ! మూఁడుకుంచములు మానెలు మూఁడు పదేనుగింజలున్
౧౬౦౧౨౭౯౮౬౭౫౦౯౫
తూము ౧ **కుంచాలు** ౩ **మానెలు** ౩ **గింజలు** ౧౫

చదరంగం గళ్ళలో ఈ ధాన్యపు గింజలను సర్దవచ్చును - ధాన్యమానంలో ఈ మొత్తం ధాన్యం ఎంతై ఉంటుందన్నది ఈ చంపకమాలలో మల్లన చెప్పాడు.

శర-5, నవ-9, ఖ-0, ఇషు-5, శైల-7, ఋతు-6, సామజ-8, రంధ్ర-9, నగ-7, అక్షి-2, చంద్రమ-1, అంబర-0, రస-6, చంద్ర-1, కాబట్టి సంఖ్య : 16012798675095

ధాన్యమానంలో చెబితే 16012798675095 పుట్లు, 1 తూము, 3 కుంచములు, 3 మానికలు, 15 గింజలవుతుందట.

గమనిక : మనోరంజనీ వ్యాఖ్యాత రాసినట్లు - మల్లన "ఈ లెక్క ఎలా చెప్పగలిగాడు? ప్రయోగపూర్వకంగా ఏ తూమెడో, మానెడో వడ్లగింజలు

కొలతగా తీసుకొని, గింజలు లెక్కపెట్టి ఉండాలి. లేకపోతే ఇంత కచ్చితంగా లెక్కచెప్పటం కుదరదు? ఈ సమస్య మూలంలో లేదు – మల్లన స్వయంగా తన కృతిలో చేర్చాడు. ఈ సమస్య ప్రపంచఖ్యాతి గాంచినది. ప్రపంచంలోని వినోద గణితగ్రంథాలలో ఇది కానవస్తుంది. "ఆధునికకాలంలో డబ్ల్యు డబ్ల్యు రౌజ్‌బాల్, పెరెల్మన్, అర్థవ్‌గామో, జెరోమ్‌మేయర్ వంటి గణితజ్ఞులకు పూర్వం, ఈ సమస్య ఇంత వివరంగా చర్చించిన గణితజ్ఞుడు గణిత ప్రపంచంలో మల్లన ఒక్కడే" –

గుణసంకలితాద్యానయన సూత్రము

తే. [1]**గచ్ఛ పరిమాణగుణహతిఁ గ్రచ్చరంగ**
నర్థ మేకోనగుణహత మైనదానిఁ
బాలుగొని శేషమునఁ గ్రిందిభాగహార
రాశితోఁ బుచ్చుమిగిలిన రాశియాది.

పద్యభావం : గచ్ఛ పరిమాణాన్ని గుణించే, గుణమునందు ఒక్కటి తక్కువచేసి అంటే పదసంఖ్య n – అన్నిసార్లు పదానుపాతాన్ని, rను గుణించండి → r^n. "అర్థమేకోన గురుహతమైన దాని" అంటే ఒక్కటి తరిగిన పదాంతరం → (r–1)తో సంకలితాన్ని గుణించండి→S(a–1) ఇపుడు పాలుగొని అంటే భాగించి, తరువాత మల్లన చెప్పినది సందిగ్ధంగా ఉన్నది అంటే "శేషమును క్రింది భాగహారరాశితో తీసివేయగా మిగిలినది రాశి ఆది" – ఇది స్పష్టంగా లేదు – అందువల్లే బ్రహ్మశ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రిగారు పాఠాంతరాన్ని ఉటంకించినారు (Foot notes)

"పట్టణములన్ని యొక్కట్లు పరగనిలిపి"→ n గుణముల rను పెంచి, r^n, ఒక్కటియు బుచ్చి→(r^n–1) దాననే కోనగుణహ తార్థతతి→S(r–1), పాలుగొన లబ్ధమాది (a) అయ్యె అంటే a=S(r–1)÷(r^n–1)

1. పట్టణములన్ని యొక్కట్లు పరగనిలిపి। గుణములను బెంచి యన్యోన్య గుణితమందు। నొక్కటియుఁ బుచ్చి దాన నేకోనగుణహ। తార్థతతిఁ బాలుగొన లబ్ధమాదియయ్యె.

గనక గుణశ్రేఢిలో s, r, n లు తెలిసినప్పుడు a ను కనుగొనే పద్ధతిని చెప్పడం జరిగింది.

ఉదాహరణ

క. కరిసంఖ్య గుణోత్తర మిషు
పరిమాణము గచ్ఛ ధనము పావకవేదాం
బరయుగశశిసంఖ్య యగున్
బరగంగా నాదియెంత పరికింపుమిలన్.
ఆ ౦ గు ౮ గ ౫ ధనము ౧౪౦౪౩ **లబ్ధాది** ౩

కరిసంఖ్య–8, ఇది గుణోత్తరం అంటే r

ఇషు పరిమితం – 5 ఇదిగచ్ఛ అంటే n

పావక–3, వేద–4, అంబర–0, యుగ–4, శశి–1 అంటే సంఖ్య 14043 ధనము s అయితే a ఎంత?

$a = s(r-1) \div (r^n - 1)$

$=14043 \times (8-1) \div (8^5 - 1)$

$= (14043 \times 7) \div (32768 - 1)$

$= 98301 \div 32767 = 3$

క. పురసంఖ్య గుణోత్తర మిభ
పరిమితమగు గచ్ఛ ధనము పరికింపఁగ నం
బరరసనిధికరలోచన
పరిమితమగు దీనియాది వరికింపు మిలన్.
ఆ ౦ గు ౩ గ ౮ ధనము ౨౨౯౬౦ **లబ్ధాది** ౭

పురసంఖ్య–3 గుణోత్తరము→ r

ఇచ్ఛపరిమితము – 8, గచ్ఛ→ n

అంబర–0, రస–6, నిధి–9, కర–2, లోచన–2 అంటే సంఖ్యధనము 22960 → s అయిన లబ్ధాది?

$a = s(r-1) \div (r^n - 1)$

$= 22960 \times (3-1) \div (3^8 - 1)$

$= 22960 \times 2 \div (6561 - 1)$

$= 45920 \div 6560 = 7$

క. [1]**గుణకము గుణోత్తరము వా**
రణములు గచ్ఛయగు నంబరర్తుశరర్తుల్
గణన ధనమాది దీనికి
గణుతించి యెఱుంగఁ జెప్పుఁ గణితవిధిజ్ఞా.
ఆ ౦ **గు** ౩ గ ౮ **ధనము** ౬౫౬౦ **లబ్ధాది** ౨

గుణ–3, గుణోత్తరము అంటే r

వరణములు –8, ఇది గచ్ఛ అంటే n

ధనము : అంబర–0, ఋతు–6, శర–5, ఋతు–6, అంటే 6560. ఇది s అయితే a ఎంత?

$a = s(r-1) \div (r^n - 1)$

$= 6560 \times (3-1) \div (3^8 - 1)$

$= 6560 \times 2 \div 6560 = 2$

[2]గుణోత్తరానయన సూత్రము

క. **ధనమాదిఁ బాలుగొని యం**
దొనరంగా నొకఁడు వుచ్చి యుడుగక యిష్టం

1. క. గుణముల గుణోత్తరము వా। రణములు పట్టణములంబరర్తు శరర్తుల్। గణుతింప ధనము దీనికి। గణకా! మొదలెంత సెప్పుఘనముగ మాకున్.
2. ఇంక సంకలితోత్తరానయన సూత్రం బెట్టిదనిన,

బునఁ దాఁ బాల్గొని యొక్కం
డనవరతము బుచ్చ నిష్టమది ప్రచయమగున్.

గుణశ్రేఢిలో a,n,s లు దత్తాంశములైతే పదానుపాతం r ను కనుక్కోవడం ఈ పద్యంలో వివరించడమైనది.

గమనిక : అంకశ్రేఢిలో n ను కనుక్కోవడానికి వర్గమూలం కట్టవలె. ఇప్పుడు గుణశ్రేఢిలో n ను కనుక్కోవడానికి n వ మూలం కట్టవలె. ఇది ప్రయాసతో కూడినపని. ఇందుకు ఒక పద్ధతి అంటూ లేదు. నేటికీ సంవర్గమానాలు, కంప్యూటర్లు, ప్రయోగ–దోషపద్ధతులే శరణ్యాలు. ఏ పద్ధతిని ఉపయోగించినా అనేక సందర్భాలలో ఉజ్జాయింపు విలువే వస్తుంది.

పద్యభావం : ధనమును ఆదితో భాగించి దానిలో ఒకటి తొలగించి, ఇష్టధనములో దానిని భాగించి విభక్తం తీసుకొని దానినుండి ఒకటి తొలగించి మళ్ళీ అదే ఇష్టసంఖ్యతో భాగించండి. ఇట్లా విభక్తం ఒకటి వచ్చేవరకు ప్రక్రియను కొనసాగించగలిగినప్పుడు ఆ యిష్ట సంఖ్యయే r అవుతుంది.

ఆధునిక సంకేతాలతో

$s = a(r^n - 1) \div (r - 1)$

$\frac{s}{a} = \frac{r^n - 1}{r - 1} = r^n - 1 + p, r^n - 2 + \cdots$

ఇక్కడ $\frac{s}{a}$ ను r లో (n-1) ఘాత సమాసం, తద్వారా (n-1) వ ఘాత సమీకరణంగా రూపొందించి దాని మూలాన్ని రాబట్టాలి. అదే rకు ఒక విలువ.

క. **పురసంఖ్య యాది గచ్ఛయు**
శరసంఖ్యధనంబు వహ్నిజలనిధులు వియ
త్సరసిజ భవముఖ చంద్రులు
పరగ గుణోత్తరము సెప్పు [1]పరికించి మదిన్. **49**
ఆ ౩ **గు** ౦ గ ౫ **ధనము** ౧౪౦౪౩ **లబ్ధగుణోత్తర** ౮

1. ఇంక సంకలితగచ్ఛానయనసూత్రం బెట్టిదనిన.

పురసంఖ్య–3 ఇది ఆది a

శరసంఖ్య–5 ఇది గచ్ఛ n

వహ్ని–3, జలనిధి–4, వియత్–0, సరసిజభవ

ముఖ–4, చంద్ర–1 అంటే ధనము – 14043. ఇది s అయితే గుణోత్తరము r ఎంత?

$$\frac{s}{a} = \frac{14043}{3} = 4681$$

ఇక్కడ భాగించే యిష్ట సంఖ్య 8గా తీసుకొన్నాము.

	−1	÷8
4681	4680	585
585	584	73
73	72	9
9	8	1

కాబట్టి r=8.

క. అది యేడు గచ్ఛ యగు మణి గజసంఖ్య
గగనరసనవాక్షికరము లయ్యెఁ
దెలిసి చూడ ధనము దీని గుణోత్తర
మేర్పరింపు గణక! నేర్పుతోడ. 50
ఆ ౭ గు ౦ గ ౮ ధనము ౨౨౯౬౦ లబ్ధగుణోత్తర ౩

ఆది a=7, గచ్ఛ n=8, ధనము: గగన–0, రస–6, నవ–9, అక్షి–2, కరములు–2 అంటే 22960 అయితే గుణోత్తరము అంటే r ఎంత?

$$\frac{22960}{7} = 3280$$

	−1	÷3
3280	3279	1093
1093	1092	364
364	363	121
121	120	40

40	39	13
13	12	4
4	3	1

కాబట్టి r=3.

క. రెండాది గచ్ఛ యెనిమిది
వెండియగున్ గగనతర్క విషయరసంబుల్
నిండినధనము గుణోత్తర
పండితకులతిలక తెలియఁ బలుకుము మాకున్. 51
ఆ ౨ గు ౦ గ ౮ ధనము ౬౫౬౦ లబ్ధగుణోత్తర ౩

ఆది a=2, గచ్ఛ n=8, ధనము: గగన–0, తర్క–6, విషయ–5, రసములు–6, అంటే 6560 అయితే ఉత్తర r ఎంత?

$$\frac{s}{a} = \frac{6560}{2} = 3280$$

	−1	÷3
3280	3279	1093
1093	1092	364
364	363	121
121	120	40
40	39	13
13	12	4
4	3	1

కాబట్టి r=3.

గుణ సంకలితగచ్ఛానయన సూత్రం

క. ఒకఁడూన మైనగుణమున
నకలార్థముఁ బెనిచి యాదిఁ జనఁ బాల్గొని యం
దొకటి యుతమై గుణోత్తర
ప్రకటింపుచు వ్రాసికొనఁగఁ బట్టణములగున్. 52

ఈ కందపద్యంలో, కింద సూచించిన ఆధునిక సంకేతాల సమీకరణ భావాన్ని వివరించడం జరిగింది.

$$s = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ కాబట్టి } (r^n - 1) = \frac{s(r-1)}{a}$$

$$\therefore r^n = \frac{s(r-1)}{a} + 1$$

సంకలితం sను ఒకటి తక్కువైన పదానుపాతం అంటే (r-1)తో గుణించి, ఆదితో అంటే aతో భాగించి, ఈ విభక్తానికి ఒకటి కలపండి. ఈ ఫలితాన్ని పదానుపాతం r తో పరంపరంగా ఎన్నిసార్లు భాగించగలమో చూడండి. అదే పదసంఖ్య n.

గమనిక : $\sqrt[n]{r}$ కట్టడం అంత తేలికగాదు – క్రీ.శ.9వ శతాబ్ది కాలంలో మహా వీరాచార్యుడు ఈ n–వ మూలం కట్టడానికి ఒక చక్కని పద్ధతిని కనుగొని తన పుస్తకం ద్వారా ప్రపంచానికి తెలియచేశాడు. ఇది ఎంతగానో ప్రశంసించవలసిన విషయం– “మల్లన అనువాదంలో సూత్రం తొలిభాగం చక్కగా చెప్పినా అసలు విషయం (rతో పరంపరగా భాగించడం) లేకపోవడం ఆశ్చర్యకరంగా ఉంది” మనోరంజనీ వ్యాఖ్య.

తే. ఆది మూఁడు గుణోత్తరం బష్టసంఖ్య
రామవేదాంబరాంబుధి రాజసంఖ్య
గలుగు ధనమైన దీనికి గచ్ఛ యెంత
పండితోత్తమ! మాకు నేర్పడఁగఁ జెపుమ. 51

ఆ ౩ **గు** ౮ **గ** ౦ **ధనము** ౧౪౦౪౩ **లబ్ధగచ్ఛ** ౫

ఆది–3, గుణోత్తర–8, ధనము: రామ–3, వేద–4, అంబర–0, అంబుధి–4, రాజ–1, కాబట్టి సంఖ్య=14043.

అయితే గచ్ఛ ఎంత?

ఇప్పుడు a=3, r=8, s=14043 కాబట్టి

$$r^n = \frac{s(r-1)}{a} + 1 \quad \text{ప్రకారం}$$

$$8^n = \frac{14043 \times 7}{3} + 1 = 32768$$

32,768 “పరంపరగా” 5సార్లు భాగించిచూద్దాం.

8 | 32,768 – శేషం–0
8 | 4,096 – శేషం–0
8 | 512 – శేషం–0
8 | 64 – శేషం–0
8 | 8 – శేషం–0
1 – శేషం–0

గనక 8^5=32,768, గచ్ఛ=n=5

తే. ఆది యేడు గుణోత్తర మగ్నిసంఖ్య
గగనరసనిధినయనాక్షిగణన ధనము
గాఁగ వచ్చినదీనికి గచ్ఛ యెంత
వచ్చు గణితజ్ఞ! చెప్పు ధ్రువంబుగాఁగ.

ఆ ౭ **గు** ౩ **గ** ౦ **ధనము** ౨౨౯౬౦ **లబ్ధగచ్ఛ** ౮

ఆది–7, గుణోత్తర–3, ధనము: గగనం–0, రస–6, నిధి–9, నయన–2, అక్షి–2 కాబట్టి సంఖ్య=22960 అయితే గచ్ఛ ఎంత?

సమస్య: a=7, r=3, s=22960 అయితే గచ్ఛ ఎంత?

$$r^n = \frac{s(r-1)}{a} + 1 \quad \text{ప్రకారం}$$

$$3^n = \frac{22960 \times 2}{7} + 1 \text{ అంటే } 3^n = 6561$$

ఇక 3 | 6561 – శేషం–0
3 | 2187 – శేషం–0
3 | 729 – శేషం–0
3 | 243 – శేషం–0
3 | 81 – శేషం–0
3 | 27 – శేషం–0

3|9 – శేషం–0

3|3 – శేషం–0

1 – శేషం–0

గనక $3^8=6561$ గచ్ఛ n =8

క. [1]విను రెండాది గుణోత్తర
మును మూఁడు నభోరసాస్త్రములు దర్కములున్
ధనసంఖ్య గచ్ఛ దీనికిఁ
జన మాకెఱిఁగింపు గణితశాస్త్రవిధిజ్ఞా!
ఆ ౨ గు ౩ గ ౦ ధనము ౬౫౬౦ లబ్ధగచ్ఛ ౮

ఆది–2, గుణోత్తర–3, ధనము: నభ–0, రస–6, అస్త్ర–5, తర్క–6, కాబట్టి సంఖ్య=6560 అయితే గచ్ఛ ఎంత?

సమస్య: a=2, r=3, s=6560 అయితే గచ్ఛ n ఎంత?

$$r^n = \frac{s(r-1)}{a} + 1$$ ప్రకారం

$$3^n = \frac{6560 \times 2}{2} + 1 = 6561$$ $3^n=6561$

ఇక 3|6561 – శేషం–0

3|2187 – శేషం–0

3|729 – శేషం–0

3|243 – శేషం–0

3|81 – శేషం–0

3|27 – శేషం–0

3|9 – శేషం–0

3|3 – శేషం–0

1 – శేషం–0

కాబట్టి $3^8=6561$ ∴ గచ్ఛ n =8

1. క. వినురెండాది గుణోత్తర, మనఘూ! మఱి మూఁడు కనకమ(భకుమారా
ననశరబుతు సంఖ్య ముదం, బునఁ జెప్పుము దీని గచ్ఛ బుధజనవినుతా

[1]ఆద్యుత్తరగచ్ఛానయనాలకుఁ బునరపిసూత్రం

చ. వలసినసంఖ్యచేతను సువర్ణము గొన్నను గచ్ఛ గచ్ఛలోఁ
జెలువుగ నొక్కటూని యల శేష దళంబున లబ్ధిలెక్క పెం
పొలయఁగ నెత్తుఁడీ మిగిలియుండ బుధోత్తమ! శేష మాదియౌఁ
బొలుపుగ లబ్ధముత్తరగు భూరిమతిం దెలియంగఁ జెప్పితిన్.

ఆది ఉత్తర గచ్ఛలను సాధించేందుకు సూత్రం మళ్ళీ చెప్పడం జరిగింది.

పద్యభావం : కావలసిన సంఖ్యచేత ధనము గ్రహిస్తే గచ్ఛ, గచ్ఛలో ఒకటి తీసివేసి శేషదళములలో లబ్ధిని పెంచగా శేషము ఆది, లబ్ధము ఉత్తరము.”

విధివిధానము వివరించడంలో స్పష్టతలోపించింది. బహుశః ఇది ప్రక్షిప్తమేమో – ఇదివరకే ఇట్లాంటి సమస్యలను బాగా చర్చించిన నేపథ్యంలో పద్ధతిని మళ్ళీ చెబుతున్నాననడంలో ఔచిత్యం లేదు –

వ. గుణసంకలితోత్తరానయనసూత్రం బెట్టిదనిన,

ధనము, ఉత్తరలకు సంబంధించిన సూత్రం

ఆ. విత్త మాదిచేత వేద్కతో భాగించి
లబ్ధమందు శశిఁ దొలంగఁ జేసి
యోపినంత యెత్తి యొక్కటొక్కటి మాను
శేషముత్తరయ్యెఁ జెలఁగి గణక!

ఆదితో ధనమును భాగించి, లబ్ధములో 1 ని తొలగించి కడవరకు భాగింపగా మిగులు శేషము ఉత్తర. ఈ పద్యంలోనూ స్పష్టతలోపించింది.

గీ. ఇష్టుఁ దుత్కలితుఁడు హితుఁడుఁ బ్రియుండును
శేషుఁడును సఖుండు చెలి యనంగ

1. ఈపద్యములు కొన్ని ప్రతులలో నున్నవి

బంధుఁ డాప్తుఁ డనఁగఁ బాటిలు నామంబు
లుత్కలితుఁడు నంబుజోదరుండు.

ఇష్టుడు, ఉత్కలితుడు, హితుడు, ప్రియుడు, శేషుడు, సఖుడు, చెలి, బంధుడు, ఆప్తుడు అన్నది ధనము తాలూకు పదాలు.

గమనిక: ఈ గ్రంథంలో చివరి మూడుపద్యాలు మల్లన శైలికి, పద్ధతికి విరుద్ధంగా ఉన్నాయి. వాటివల్ల కొత్తదనమంటూ ఏమీలేదు. కాబట్టి పండితులు పరిష్కర్తలు శంకించినట్లు ఇవి ప్రక్షిప్తాలైనవని భావించవలె.

ఇది – సారసంగ్రహగణిత శాస్త్రంబునందు సంకలితము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

పరికర్మగణితము

వ్యుత్కలితము.

వ. [1]అందు సప్తమ పరికర్మంబైన సంకలితంబు చెప్పిన తదనంతరం బష్టమపరికర్మం బెట్టిదనిన,

ఏడవదైన సంకలితం చెప్పిన తరువాత ఎనిమిదోదైన వ్యుత్కలితం గురించి చెబుతున్నాడు కవి.

గమనిక: మనం తీసివేతను వ్యవకలనం అంటాం. మహావీరాచార్యుడు 'వ్యుత్కలితం' అనే పదాన్ని వాడారు.

వ్యుత్కలితం అంటే పోగా మిగిలింది. దీనిని పోలిన మరోపదం ఉత్కలితం అంటే విడువబడినదని అర్థము.

"ఏదైన ఒక పెద్దశ్రేఢిలో, ఇష్టానుసారం మొదటనున్న కొంత భాగాన్ని తొలగించినప్పుడు, అసలుశ్రేఢిని పూర్ణశ్రేఢి అంటాము. తొలగించిన తొలిభాగాన్ని ఇష్టశ్రేఢి అంటాము. పూర్వశ్రేఢిలో ఇక మిగిలి ఉన్నభాగం శేషశ్రేఢి – దీని పదాల మొత్తమే వ్యుత్కలితం" – మనోరంజనీవ్యాఖ్య.

ఉదాహరణ :

ఒకదత్తశ్రేఢి : 3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25 అనుకొందాము. ఇది పూర్ణశ్రేఢి.

ఇందులో 11 తరువాతగల పదాల మొత్తమెంత?

అంటే 3 నుండి 11వరకు గల ఐదు పదాలను తొలగించారు. కాబట్టి

ఇష్టశ్రేఢి 3,5,7,9,11 – ఐదు పదాలు

1) అందష్టమ వ్యుత్కలిత సూత్రం బెట్టిదనిన,

శేషశ్రేఢి 13,15,17,19,21,23,25 – ఏడుపదాలు.

పూర్ణశ్రేఢి సంకలితం $= \frac{12}{2}(3 + 25) = 168$

ఇష్టశ్రేఢి సంకలితం $= \frac{5}{2}(3 + 11) = 35$

శేషశ్రేఢి సంకలితం $= \frac{7}{2}(13 + 25) = 133$

∴ వ్యుత్కలితం $= 133 = (168 - 35)$

దీనిని శేషధనం, వ్యుత్కలితధనం అనీ అంటారు.

గమనిక: a+(a+d)+(a+2d)+...+[a+(n-1)d] ఒక అంకశ్రేఢి. ఇందులో n పదాలున్నాయి. ఈ n–పదాల మొత్తం

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[a + a(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}$$ (మొదటిపదం+చివరి అంటే nవ పదం)

$$= \frac{n}{2}[a + l]$$ సంకేతాలలో

ఇక్కడ చివరిపదం l చివరిపదం అంటే n–వ పదం. సంకలితాలు కట్టడానికి ఈ సూత్రం వాడుకొన్నాము.

క. సహితపద హిత పదేష్టము
రహితైకము సేసి యుత్తరఘ్నములైనన్
[1]ద్విహతాది యుతరహితపద
ప్రహతార్ధములైన నుభయఫలములు వచ్చున్.

1) ద్విహతాది యుతస్వపద
ప్రహతోద్యద్దళిత ముభయఫలములు వచ్చున్.

“హిత సంఖ్యలను అహిత సంఖ్యలను, ఇష్టరహిత సంఖ్యలను ఒకటిగా చేసి ఉత్తరను తీసివేయగా ద్విగుణితమైనట్టి, ద్వికముతో కూడినట్టి ఆది చేత గుణింపబడినవైతే ఉభయఫలితాలు వస్తాయి” (గౌ॥ సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రి) –

ఇందులో హితసంఖ్యలు, అహిత సంఖ్యలు, ఉత్తరఘ్నము, ద్విహతం, ఆదియుత, రహిత, ప్రహతార్ధము, ఉభయఫలములు అన్న సాంకేతిక పదాలున్నాయి – వీటిని గురించిన నిర్వచనాలు అస్పష్టాలు.

ఈ సందర్భంగా విద్వాన్ తెన్నేటిగారి మనోరంజనీ వ్యాఖ్యను చూద్దాం:

పద్యభావం: పూర్ణశ్రేఢి, ఇష్టశ్రేఢి పదసంఖ్యల మొత్తాన్ని ఒకటి తగ్గించి, పదాంతరం తో గుణించి రెండింతల ఆది పదం – 2a కూడాలి. వచ్చినదాన్ని పదసంఖ్యల తేడాలో సగంతో గుణిస్తే, రెండురకాల (అంక, జ్యామితి) శ్రేఢులకు వ్యుత్కలితం లభిస్తుంది.

వ్యాఖ్య: పూర్ణశ్రేఢుల సాధారణరూపాలు

అంకశ్రేఢి: a, a+d,....a+(n-1)d, a+nd...a+(N-1)d

గుణశ్రేఢి : a, ar, ... ar^{n-1}, ar^{n}...ar^{N-1}

పూర్ణశ్రేఢిలో N, ఇష్టశ్రేఢిలో n పదాలున్నాయి.

శేషశ్రేఢి ఆదిపదం : a+nd

అంత్యపదం : a+(N-1)d

శేషశ్రేఢి పదాలసంఖ్య = N-n

వ్యుత్కలితం = శేషశ్రేఢి సంకలితం

= (మొదటిపదం+చివరిపదం) పదసంఖ్య / 2

$$= \{a + nd + a + (N-1)d\}\frac{N-n}{2}$$

$$= [2a + (n + N - 1)d]\frac{N-n}{2}$$

ఈ ప్రకియ గుణశ్రేఢికి కూడా వర్తిస్తుంది.

క. ఏకాది నవాంత్యముగా
నేకాద్యేకోత్తరముల నెసగిన గచ్ఛా
నీకము పదింట నెనిమిది
యాకారము వ్రయము వెట్టి యాయము తెమ్మా!

౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦	౧౦
౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯
౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯

ఇష్టగచ్ఛ ౮ లబ్ధవ్యుత్కలిత శేషధనము ౧౯ వ్యుత్కలితము. ౩౬। ౩౮। ౭౨। ౧౨౮। ౭౬। ౧౪౪। ౯౫। ౧౮౦। ౧౧౪। ౨౧౬। ౧౩౩। ౨౫౨। ౨౨౮। ౧౭౧। ౩౨౪। ౧౯౦। ౩౬౦.

1 నుండి 9 వరకు ఆదిపదాలు : వాటి పదాంతరాలు 1 నుండి 9 వరకు. ఇట్లా తొమ్మిది శ్రేఢులు వస్తాయి. ప్రతిశ్రేఢిలో పదేసి పదాలున్నాయి. ఈ శ్రేఢుల్లో మొదటి ఎనిమిది పదాలు వదలి, తక్కిన రెండు పదాల మొత్తాలు (వ్యుత్కలితాలు) గణించండి.

ఉదాహరణకు మొదటి శ్రేఢి తీసుకొందాము.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (1)

ఇది పూర్ణశ్రేఢి, ఇందులో ఇష్టశ్రేఢి 1,2,3,4,5,6,7,8 (2)

కాబట్టి శ్రేఢి 9,10 (3)

ఇపుడు (1) తాలూకు సంకలితం - 55 (పూర్ణసంకలితం)

(2) తాలూకు సంకలితం - 36 (ఇష్టసంకలితం)

(3) తాలూకు సంకలితం - 19 (శేషసంకలితం)

వరుస సంఖ్య	ఇష్టశ్రేఢి	శేషశ్రేణి	పూర్ణ సంకలితం	ఇష్ట సంకలితం	శేష సంకలితం
1	1,2,3,4,5,6,7,8	9,10	55	36	19
2	2,4,6,8,…16	18,20	110	72	38
3	3,6,9,…24	27,30	165	108	57
4	4,8,12,…32	36,40	220	144	76
5	5,10,15…40	45,50	275	180	95
6	6,12,18…48	54,60	330	216	114
7	7,14,21…56	63,70	385	252	133
8	8,16,24…64	72,80	440	288	152
9	9,18,27…72	81,90	495	324	171

ఉదాహరణ

క. విను మాది నాలు గుత్తర
మెనిమిది గచ్ఛ ప్రమాణ మిరువదియాఱై
చను నిష్టగచ్ఛ తొమ్మిది
ధనశేషములైన వ్రయము దానెంతయగున్.

ఆ ౪ ఉ ౮ గ ౨౬ ఇష్టగచ్ఛ ౯ శేషధనము ౨౩౮౦ వృత్కలితధనము ౩౨౪

ఆది-4, ఉత్తర-8, గచ్ఛ-26 ఇష్టగచ్ఛ-9 అయితే ధనశేషము, వ్యుత్కలితధనము ఎంత? అంటే a=4, d=8, N=26, n=9 వ్యుత్కలితం (శేషశ్రేఢి సంకలితం) ఎంత?

శేషశ్రేఢిలో పదాల సంఖ్య N-n=26-9=17

శేషశ్రేఢిలోని పదవపదం పూర్ణశ్రేఢిలో పదవపదం. ఈ పదవపదాన్ని A అనుకొంటే $A = a(10-1)d = 4 + 9 \times 8 = 76$

ధనశేషం=శేషశ్రేఢిమొత్తము $= \frac{17}{2}\ [2 \times 76 + 16 \times 8]$

$= 2380$

వ్యుత్కలితధనం = పూర్ణశ్రేఢిమొత్తం–శేషశ్రేఢిమొత్తం

= 2704–2380=324

తే. ఆది షష్ఠంబు నుత్తర మష్టసంఖ్య
గచ్ఛ యిరువదిమూఁ డిష్టగచ్ఛ కొలఁది
వెలయఁ బదమూఁడు మిగిలిన విత్తమెంత
యెనగ దద్వ్యుత్కలితధన మెంత సెపుమ.

ఆ ౬ **ఉ** ౮ **గ** ౨౩ **ఇష్టగచ్ఛ** ౧౩ **లబ్ధశేషధనము** ౧౪౬౦ **వ్యుత్కలితధనము** ౭౦౨

ఆది–6, ఉత్తర–8, గచ్ఛ–23, ఇష్టగచ్ఛ–13 అయితే ధనమెంత? వ్యుత్కలిత ధనమెంత?

దత్తాంశములు : a=6, d=8, N=23, n=13.

పూర్ణశ్రేఢి : 6,14,22,...(23) పదాలు.

$$S_N = S_{23} = \frac{23}{2}\ [2 \times 6 + 22 \times 8] = 2162$$

ఇష్టశ్రేఢి $S_n = \frac{13}{2}[2 \times 6 + 12 \times 8] = 702$ (వ్యుత్కలితధనం)

శేషధనం $= 2162 - 702 = 1460$

క. శరసంఖ్య యయ్యె నాద్యు
త్తరములు నిన్నూఱు గచ్ఛ తగనిష్టపదం
బరయఁగ నూఱగుఁ దద్ధన
పరిశేషము వ్రయము సెప్పు పరగఁగ మాకున్.

ఆ ౫ **ఉ** ౫ **గ** ౨౦౦ **ఇష్టగచ్ఛ** ౧౦౦ **లబ్ధవ్యుత్కలితము** ౨౫౨౫౦ **శేషధనము** ౭౫౨౫౦

ఆద్యుత్తరములు శరసంఖ్య అంటే 5

ఆది a=5, ఉత్తర d=5, గచ్ఛ N=200, ఇష్టగచ్ఛ n=100

లబ్ధవ్యుత్కలితం : $S_{100} = \frac{100}{2}[10 + 99 \times 5] = 25250$

పూర్ణశ్రేఢి సంకలితం: $S_{200} = \frac{200}{2}[10 + 199 \times 5] = 100500$

శేషధనం= 1,00,500–25,250=75,250

తే. ఆది మూఁడును నుత్తర మద్రిసంఖ్య
గచ్ఛ యిరువది నాలుగు గాఁగ నిష్ట
గచ్ఛ పండ్రెంట నేర్పడఁ గన్న నెన్న
ధనము నిమ్ముగఁ బ్రియమైన ధనముఁ జెపుమ.

ఆ ౩ **ఉ** ౭ **గ** ౨౪ **ఇష్టగచ్ఛ** ౧౨ **వ్యుత్కలితధనము** ౪౯౮ **శేషధనము** ౧౫౦౬

ఆది a=3, ఉత్తర d=7 (అద్రి సంఖ్య), గచ్ఛ N=24, ఇష్టగచ్ఛ n=12, అయితే శేషధనము, వ్యుత్కలిత (ఇష్టధనము) ఎంత?

వ్యుత్కలిత ధనం $S_{12} = \frac{12}{2}[6 + 11 \times 7] = 498$

పూర్ణశ్రేఢి సంకలితం $S_{24} = \frac{24}{2}[6 + 23 \times 7] = 2004$

శేషధనము= $S_{24} - S_{12} = 1506.$

తే. ఆది రెండు మూఁడుత్తర మబ్ధిచంద్ర
సంఖ్య యగు గచ్ఛ దానిలో నష్టసంఖ్య

యిష్టపదమైన నివి రెండు నేర్పడంగc
జెప్పు ప్రియమైన ధనమును శేషధనము.

ఆ ౨ ఉ ౩ గ ౧౪ ఇష్టగచ్ఛ ౭ లబ్ధవ్యుత్కలితధనము ౭౭ శేషధనము ౨౨౪

ఆది a=2, ఉత్తర d=3, గచ్ఛ =14, (అబ్ధి4, చంద్ర:1 కాబట్టి 14), ఇష్టగచ్ఛ: 7 అయితే శేషధనమెంత? వ్యుత్కలిత ధనమెంత?

వ్యుత్కలితం $S_7 = \frac{7}{2}[4 + 6 \times 3] = 77$

పూర్ణశ్రేఢి సంకలితం $S_{14} = \frac{14}{2}[4 + 13 \times 3] = 301$

శేషధనము $301 - 77 = 224.$

[1]శేషగచ్ఛాద్యానయనసూత్రము

తే. ప్రచయమున నిష్టగచ్ఛ నేర్పడcగcబెంచి
యాదిగూడిన శేషాది యయ్యె[2]నదియ
యుత్తరము గచ్ఛ కవియ పూర్వోక్తమైన
సూత్రపద్ధతి నొడబడ్డc జూచుకొనుcడు.

శేషగచ్ఛాద్యానయన సూత్రం : శేషగచ్ఛ, ఆది వీటిని సాధించేందుకు సూత్రం... అంటే

శేషశ్రేఢికి తొలిపదం తెలుసుకొనేందుకు సూత్రం – నేటి మన సంకేతాలతో A=a+nd - ఇక్కడ a,n,d లు పూర్ణశ్రేఢితాలూకు అంశాలు – ఈ విషయాన్ని ఇదివరకే వివరించడం జరిగింది.

1. వ్యుత్కలితమున నాద్యుత్తరాలకు సూత్రం.
2. గచ్ఛ। వలసితెచ్చి పూర్వోక్తమైనయట్టి? సూత్రపద్ధతి ధర నిది చూచికొనుcడు

తే. ఆది రెండు మూcడుత్తర మబ్ధిచంద్ర
సంఖ్యయగు గచ్ఛ[1] మునిసప్తసంఖ్య ధనము
దీని రెంటిపెం పేర్పడc దెలుపు మాకు
పూని ప్రచయంబు విశదంబుగాను ధనము.

సంకలితాది ౨ ఉ ౩ గ ౧౪ ధనం ౭౭ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౭ లబ్ధధనము ౨౨౪ లబ్ధాది ౨౩ లబ్ధోత్తరము ౩

ఆది=2, ఉత్తర=3, గచ్ఛ అబ్ధి=4, చంద్ర–1 సంఖ్య అంటే 14

ధనము – ముని సప్తసంఖ్య అంటే ముని:7, సప్త–7, కాబట్టి 77

ఇక్కడ a=2, d=3, N=14.

$S_n = 77$ అయితే n ఎంత?

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

$77 = \frac{n}{2}[4 + (n-1)3]$ రాబట్టండి

దీనిని సూక్ష్మీకరిస్తే $3n^2 + n = 154$

$$(n-7) + (3n+22) = 0$$

కాబట్టి n=7

శేషశ్రేఢికి ఆది A=2+7×3 ∵ a+nd గనక

=23

పదసంఖ్య N–n=14–7=7, d=3

$$S_{N-n} = \frac{7}{2}[2 \times 23 + 6 \times 3] = 224$$

ఈ ఫలితాలనే లబ్ధధనం=224, లబ్ధాది=23, లబ్ధోత్తము=3 అని పేర్కొనడం జరిగింది.

1. ...యద్దాన సప్తసంఖ్య। ఇష్టగచ్ఛయు దీనికి నేర్పడంగc। జెప్పు ప్రియమైన ధనమును శేషధనము.

తే. ఆది గుణసంఖ్య యుత్తర మద్రిసంఖ్య
గచ్ఛ యిరువది [1]నాలుగు కవక మిష్ట
గచ్ఛ దినకరసంఖ్యగాఁ గన్న యట్టి
ధనము మఱియును బ్రియమైనధనము సెపుమ.

ఆది ౩ **ఉ** ౭ **గ** ౨౪ **ధనం** ౪౯౮ **వ్యుత్కలితాది** ౦ **ఉత్తర** ౦ **గచ్ఛ** ౧౨ **ధనం** ౧౫౦౬ **లబ్ధాది** ౮౭ **లబ్ధోత్తరము** ౭

ఆది- గుణసంఖ్య 3, ఉత్తర-అద్రి సంఖ్య-7, గచ్ఛ-24, ఇష్టగచ్ఛ-దినకరసంఖ్య 12

అయితే S_N, S_n, S_ϑ , $\vartheta = N - n$ లు ఎంతో కనుక్కోండి. అంటే ధనము, వ్యుత్కలిత ధనములను కనుక్కోవాలి.

S_N, S_n, S_{N-n} లు కనుక్కోవడానికి సూత్రాలు మనకు తెలుసు.

$$S_N = \frac{24}{2}\{6 + 23 \times 7\} = 2004$$

$$S_n = \frac{12}{2}\{6 + 11 \times 7\} = 498$$

$$S_{N-n} = S_N - S_n = 2004 - 498 = 1506$$

లబ్ధాది A=a+nd అంటే శేషశ్రేఢి ఆది 87

క. వినుమాది నాలుగుత్తర
యెనిమిది గచ్ఛప్రమాణ మిరువదియాఱై
చను నిష్టగచ్ఛ తొమ్మిది
[1]ధనశేషం బెంత ప్రియము దానెంతయగున్.

సంకలితాది ౪ **ఉ** ౮ **గ** ౨౬ **ధనం** ౩౨౪ **వ్యుత్కలితాది** ౦ **ఉత్తర** ౦ **గచ్ఛ** ౯ **లబ్ధధనము** ౨౩౮౦ **లబ్ధాది** ౭౬ **లబ్ధోత్తరము** ౮

1. నాల్గిష్టగచ్ఛ యినుల। సంఖ్యయగు నెన్నగా నిందు సంప్రతించి।
2. ధనశేషంబును బ్రియమును దామెంత యగున్.

ఆది-4, ఉత్తర-8, గచ్ఛ-26, ఇష్టగచ్ఛ-9 అయితే ధనశేషం, వ్యుత్కలితధనము ఎంత?

a=4, d=8, N=26, n=9, S_N కనుక్కోండి.

$$S_N = \frac{26}{2}[2 \times 4 + 25 \times 8] = 2704$$

$$S_n = \frac{9}{2}[8 + 8 \times 8] = 324$$

ధనశేషం= $S_{N-n} = S_N - S_n = 2380$

లబ్ధాది $A = 76\ (a + nd = 4 + 9 \times 8)$

తే. ఆదిరససంఖ్య యుత్తర మష్టసంఖ్య
గచ్ఛ యిరువదిమూఁడిష్టగచ్ఛకొలఁది
[1]వెలయఁ బదమూఁడుగాఁ గన్నవిత్తసంఖ్య
తగఁగఁ జెప్పుము బ్రియమైన ధనము మాకు.

సంకలితాది ౬ **ఉ** ౮ **గ** ౨౩ **ధనం** ౭౧౨ **వ్యుత్కలితాది** ౦ **ఉత్తర** ౦ **గచ్ఛ** ౧౩ **లబ్ధధనము** ౧౪౬౦ **లబ్ధాది** ౧౧౦ **లబ్ధోత్తరము** ౮

ఆది రససంఖ్య a=6, ఉత్తరం అష్టసంఖ్య d=8, గచ్ఛ N=23, అయితే ఇష్టధనము S_{N-n} ఎంతో చెప్పండి.

సూత్రం ప్రకారం

$$= S_N - S_n = (N - n) + \frac{d}{2}[N(N-1) - n(n-1)]$$

$$= 6(23 - 13) + \frac{8}{2}[23 \times 22 - 13 \times 12]$$

$$= 60 + 1400 = 1460$$

1. వెలయఁ బదమూఁడు మిగిలిన విత్తమెంత
యయ్యెఁ జెప్పుము వ్యుత్కలితార్థ మెంత?

క. **శరసంఖ్య యయ్యె నాద్యు**
త్తరములు నిన్నూఱు గచ్ఛ[1] తగ నూఱయ్యెం
బరికింప నిష్టగచ్ఛకు
నెఱిఁగింపుము ధనము శేష మేర్పడ గణకా!

సంకలితాది ౫ ఉ ౫ గ ౨౦౦ ధనం ౨౫౨౫౦ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౧౦౦ లబ్ధధనము ౭౫౨౫౦ లబ్ధాది ౫౦౫ లబ్ధోత్తరము ౫

ఆదిశరసంఖ్య-5, ఉత్తరం శరసంఖ్యయే-5, గచ్ఛ=200, ఇష్టపదం=100 అయితే ధనశేషము, వ్రయము అంటే వ్యుత్కలితధనం ఎంత? సంకేతాలతో

a=5, d=5, N=200, n=100, ధనశేషం S_{N-n} ఎంత?

$$S_{N-1} = a(N-n) + \frac{d}{2}[N(N-1) - n(n-1)]$$

$$= 5 \times (200 - 100) + \frac{5}{2}[200 \times 199 - 100 \times 99]$$

$$= 75{,}250 \quad \text{(శేషధనం)}$$

వ్యుత్కలితధనం $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{100}{2}[10 + 99 \times 5]$$

$$= 25{,}250$$

లబ్ధాది $a + nd = 5 + (100 \times 5) = 505$

క. **మనుసంఖ్య యాది యుత్తర**
యెనిమిది ఋతుశశికరంబు లెసగెను గచ్ఛం
జన నిష్టగచ్ఛ ముప్పది
దనరఁగ నేడింట నుభయధనములు వచ్చున్.

1. తగనిష్టపదం । బరయఁగ నూఱగుఁ దద్ధన ।
పరిశేషము వ్రయముసెప్పు పరగఁగమాకున్.

సంకలితాది ౧౪ ఉ ౮ గ ౨౧౬ ధనం ౫౮౪౬ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౩౭ లబ్ధధనము ౧౮౨౯౩౮ లబ్ధాది ౩౧౦ లబ్ధోత్తరము ౮

ఆది మనుసంఖ్య-14

∵ వైవస్వతాది మనువులు పదునలువురు గనక, ఉత్తర-8, గచ్ఛ, ఋతు-6, శశి-1, కరములు-2 అంటే 216 ఇష్టగచ్ఛ=30+7=37 అయినప్పుడు ఉభయ ధనములు 1-అంటే లబ్ధధనము, ధనములెంతెంత? సంకేతరూపంలో a=14, d=8, N=216, n=37, S_{N-n}, S_n ఎంత?

$$S_{N-n} = S_N - S_n = a(N-n) + \frac{d}{2}[N(N-1) - n(n-1)]$$

$$= 14 \times (216 - 37) + \frac{8}{2}[216 \times 215 - 37 \times 36]$$

$$= 1{,}82{,}938 \quad \text{(లబ్ధధనం)}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{37}{2}[28 + 36 \times 8]$$

$$= 5846 \quad \text{(ధనం)}$$

క. **ఏకాది నవాంత్యముగా**
నేకాద్యేకోత్తరముల నెసగినగచ్ఛా
నీకములు పదియు నెనిమిది
[1]సాకారముగాఁగ దీని సాయముఁ దెమ్మా.

సంకలితాది ౧ ఉ ౧ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౩౬ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౧౯ లబ్ధాది ౯ లబ్ధోత్తరము ౧

సంకలితాది ౨ ఉ ౨ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౭౨ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౩౮ లబ్ధాది ౧౮ లబ్ధోత్తరము ౨

1) యాకారముగాఁగ దీనియాయము దెమ్మా!

సంకలితాది ౩ ఉ ౩ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౧౦౮ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౫౭ లబ్ధాది ౨౭ లబ్ధోత్తరము ౩

సంకలితాది ౪ ఉ ౪ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౧౪౪ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౭౬ లబ్ధాది ౩౬ లబ్ధోత్తరము ౪

సంకలితాది ౫ ఉ ౫ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౧౮౦ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౯౫ లబ్ధాది ౪౫ లబ్ధోత్తరము ౫

సంకలితాది ౬ ఉ ౬ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౨౧౬ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౧౧౪ లబ్ధాది ౫౪ లబ్ధోత్తరము ౬

సంకలితాది ౭ ఉ ౭ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౨౫౨ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౧౩౩ లబ్ధాది ౬౩ లబ్ధోత్తరము ౭

సంకలితాది ౮ ఉ ౮ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౨౮౮ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౧౫౨ లబ్ధాది ౭౨ లబ్ధోత్తరము ౮

సంకలితాది ౯ ఉ ౯ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౩౨౪ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౧౭౧ లబ్ధాది ౮౧ లబ్ధోత్తరము ౯

సంకలితాది ౧౦ ఉ ౧౦ గచ్ఛ ౧౦ ధనం ౩౬౦ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౮ లబ్ధధనము ౧౯౦ లబ్ధాది ౯౦ లబ్ధోత్తరము ౧౦

ఇది ఒక్కొక్కశ్రేఢిలో పదేసిపదాలుగా ఏర్పడిన9 శ్రేఢుల లెక్క.

ఈ 9 శ్రేఢులకు ఆదిపదాలు వరుసగా 1,2,3,....9 వరకు

అట్లాగే పదాంతరాలు కూడా వరుసగా 1,2,3,.....9.

గచ్ఛలు పదియునెనిమిది అంటే n=10, N−n=8 అని భావించి N=18గా పరిగణించి, ఈ కింది పట్టీని తయారు చేయవచ్చు.

మనోరంజనీ వ్యాఖ్య

ఇష్టశ్రేఢి				శేషశ్రేఢి			
$a,$	$d,$	$n,$	S_n	$A,$	$N-n,$	$S_N,$	S_{N-n}
1	1	10	55	11	8	171	116
2	2	10	110	22	8	342	232
3	3	10	165	33	8	513	348
–	–	–	–	–	–	–	–
9	9	10	495	99	8	1539	1044

అయితే బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారి సాధన దీనికి భిన్నంగా ఉన్నది. వారు పదిశ్రేఢులు తీసుకున్నారు.

ఇష్టశ్రేఢి	ఇష్టధనం	శేషశ్రేఢి	శేషధనం
1,2,3,4,5,6,7,8	36	9, 10	19
2,4,6,8,10,12,14,16	72	18, 20	38
3,6,9,12,15,18,21,24	108	27,30	57
” ”	”	”	”
” ”	”	”	”
” ”	”	”	”
” ”	”	”	”
” ”	”	”	”
9,18,27,36,45,54,63,72	324	81, 90	171
10,20,30,40,50,60,70,80	360	90, 100	190

ఈ పట్టికలో శేషశ్రేఢి క్రింద మొదటి దొంతి (Column) 9,18,27...90లు వరుసగా పది లబ్ధాదులను అంటే Aలను సూచిస్తాయి – వీటికి వరుసగా లబ్ధోత్తరాలు 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 లు –

వ. ఇంక సంకలితవ్యుత్కలితశేషధనాలకు సూత్రం

ఇక సంకలిత వ్యుత్కలిత శేషధనాలకు సూత్రాలను చూద్దాం.

క. వినుమాది నాలుగుత్తర
మెనిమిది గచ్ఛప్రమాణ మిరువదియాఱై
చను నిష్టగచ్ఛ తొమ్మిది
దనరఁగ సంకలిత శేషధనములఁ దెమ్మా!

సంకలితాది ౪ ఉ ౮ గచ్ఛ ౨౬ సంకలిత సూత్రానం దెచ్చే ధనం ౨౭౦౪ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౯ వ్యుత్కలిత సూత్రానం దెచ్చిన ధనం ౩౨౪ లబ్ధాది ౭౬ లబ్ధోత్తరము ౮ వ్యుత్కలితసూత్రానం దెచ్చిన శేషధనం ౨౩౮౦.

ఆది-4, ఉత్తర-8, గచ్ఛ-26, ఇష్టగచ్ఛ-9 అయితే సంకలిత శేషధనమెంత?

ఇక్కడ "సమస్యకు శీర్షిక అసంగతంగా ఉంది" అన్నారు మనోరంజనీ వ్యాఖ్యాత –

మామూలు సంకేతాలతో, a=4, d=8, N=26, n=9

కాబట్టి $S_N = \frac{N}{2}[2a + (n-1)d]$

$= \frac{26}{2}[8 + 25 \times 8]$

$= 2704$

వ్యుత్కలితధనం $S_n = \frac{9}{2}[8 + 8 \times 8] = 324$

లబ్ధాధి= $a + nd = 4 + 9 \times 8 = 76$

శేషధనం $S_N - S_n = 2704 - 324$

$= 2380$

గీ. ఆది రససంఖ్య యుత్తర మష్టసంఖ్య
గచ్ఛ యిరువదిమూఁ డిష్టగచ్ఛకొలఁది
పరగఁ బదమూఁడు త్రివిధలబ్ధముల మాకు
గణితతత్త్వవిధిజ్ఞ నిక్కముగఁ జెపుమ!

సంకలితాది ౬ ఉ ౮ గచ్ఛ ౨౩ సంకలిత సూత్రానం దెచ్చినలబ్ధం ౨౧౬౨ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౧౩ వ్యుత్కలిత సూత్రానం దెచ్చిన ధనం ౭౦౨ లబ్ధాది ౧౧౦ లబ్ధోత్తరము ౮ వ్యుత్కలితసూత్రానం దెచ్చిన శేషధనం ౧౪౬౦.

ఆది రససంఖ్య-6, ఉత్తర, అష్టసంఖ్య-8, గచ్ఛ-23, ఇష్టగచ్ఛ-13 అయితే త్రివిధ లబ్ధములను జెప్పుము అంటే ధనము, వ్యుత్కలితధనము, శేషధనములను తెలుపండి –

a=6, d=8, N=23, n=13 అయితే

S_N, S_n, S_{N-n} లను కనుక్కోవాలి.

$S_N = \frac{23}{2}[2 \times 6 + (23-1) \times 8]$

$= 2162$ ఇది ధనము

ఇప్పుడు $S_n = \frac{13}{2}[2 \times 6 + (13-1) \times 8]$

$= 702$ వ్యుత్కలితధనం

శేషధనం $S_N - S_n = 2162 - 702 = 1460$

లబ్ధాది=$a + nd = 6 + 13 \times 8 = 110$

క. శరసంఖ్య యయ్యె నాద్యు
త్తరములు నిన్నూఱు గచ్ఛ తగ నిష్టపదం

బరయఁగ నూ[1]ఱును గణకా!
యెఱిగింపుము త్రివిధధనము లేర్పడ మాకున్.

సంకలితాది ౫ ఉ ౫ గచ్ఛ ౨౦౦ సంకలిత సూత్రానం దెచ్చినలబ్ధం ౧౦౦౫౦౦ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౧౦౦ వ్యుత్కలితసూత్రానం దెచ్చిన ధనం ౨౫౨౫౦ లబ్ధాది ౫౦౫ లబ్ధోత్తరము ౫ వ్యుత్కలితసూత్రానం దెచ్చిన శేషధనం ౭౫౨౫౦.

ఆది−5, ఉత్తర−5, గచ్ఛ−200, ఇష్టగచ్ఛ−100 అయితే త్రివిధధనము

a=5, d=5, N=200, n=100

$S_N = \frac{200}{2}[10 + 199 \times 5] = 100500$ ధనం

$S_N = \frac{100}{2}[10 + 99 \times 5] = 25250$ వ్యుత్కలితధనం

శేషధనం $S_N - S_n = 75250$

లబ్ధాది $= a + nd = 5 + 100 \times 5$

$= 505$

గీ. ఆదియును మూఁడు నుత్తర మద్రిసంఖ్య
గచ్ఛ యిరువదినాలుగు కరము నిష్ట
గచ్ఛ పండ్రెండు [2]నేర్పడంగ మఱి చెప్పు
త్రివిధధనములు మఱి బుధతిలక! మాకు.

సంకలితాది ౩ ఉ ౭ గచ్ఛ ౨౪ సంకలిత సూత్రానందెచ్చినధనం ౨౦౦౪ వ్యుత్కలితాది ౦ ఉత్తర ౦ గచ్ఛ ౧౨ వ్యుత్కలితసూత్రానం దెచ్చిన లబ్ధధనం ౪౯౮ **లబ్ధాది** ౮౭ **లబ్ధోత్తరము** ౭ **వ్యుత్కలితసూత్రానం దెచ్చిన శేషధనం** ౧౫౦౬.

1) అగుదీనం । దర మెఱఁగి క్రమానఁ ద్రివిధధనములు దెమ్మా!

2) నేర్పడఁగాను జెప్పు

ఆది−3, ఉత్తరము అది సంఖ్య అంటే−7, గచ్ఛ−24, ఇష్టగచ్ఛ−12 అయితే త్రివిధ ధనములను కనుక్కోండి.

a=5, d=5, N=24, n=100

$S_N = \frac{24}{2}[6 + 23 \times 7] = 2004$ ధనం

$S_N = \frac{12}{2}[6 + 11 \times 7] = 498$ వ్యుత్కలితధనం

శేషధనం $S_{N-n} = S_N - S_n = 1506$

ఇది సారసంగ్రహ గణిత శాస్త్రంబునం దష్టమ వ్యుత్కలితము సమాప్తము

ఇది సవరసంగ్రహ గణితశాస్త్రంబున అష్టమపరిచ్ఛేదం వ్యుత్కలితం సమాప్తం.

ఒకటవ అధ్యాయం సమాప్తం

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్న(కలాసవర్ణ) గణితము

శ్రీకాంతనిర్మలమనోర్చితపాదపద్మం
విశ్వోద్భవస్థితిలయాదివిధానహేతుమ్ ।
తత్తద్గుణత్రయవశాత్ప్రవిభక్తమూర్తిం
సర్వజ్ఞ మీశ్వర మహం ప్రణమామి భక్త్యా ॥

శ్రీకాంతుడైన శ్రీమహావిష్ణువు కూడా శివుని పాదపద్మాలు అర్చిస్తాడు. ఆ శివుడు ఈ విశ్వంయొక్క సృష్టి, స్థితి, లయాలకు హేతువు. త్రిగుణములతో, ఆయావిధులను నిర్వహించడంకోసం మూడుమూర్తులు దాల్చినవాడు. సర్వజ్ఞుడు అటువంటి ఈశ్వరునకు భక్తితో ప్రణమిల్లుచున్నాను.

వ. అందుఁ (ఇంకఁ) బ్రథదుంబైన పరికర్మగణితంబు చెప్పిన తదనంతరంబ ద్వితీయంబైన భిన్నగణితంబు చెప్పుదు నందుఁ బ్రథమ పరికర్మంబైన గుణకారజాతియందుఁ గరణసూత్రం బెట్టిదనిన;

మొదటిదైన పరికర్మగణితం చెప్పిన తరవాత రెండోదైన భిన్నగణితాన్ని చెబుతాను. అందులో తొలి ప్రక్రియ గుణకారంతో కరణసూత్రమంటే ఏమిటో తెలుసుకుందాము.

క. [1]ఛేదాంశము లన్యోన్య
చ్ఛేదాంశగుణములు గాఁగఁ జేసినభిన్న
ప్రాదుర్భూతము గుణకా
రాదివిధాన మని చెప్పి రాచార్యమునుల్. 1

టీక. అంశచేత నంశ గుణియించి, ఛేదంచేత ఛేదం గుణియించి ఆ గుణితచ్ఛేదముచేతను అంశ పాల్గొనేది. ఆలబ్ధం భిన్నాల గుణియించిన ఫలం అవును.

1) వజ్రాపవర్తననిధి (The Process of Cross reduction) చేయవలెనని మూలమునఁ గలదు. ఆంధ్రీకరణమున నిది లేదు.

అంశచేత (లవంచేత) అంశాన్ని, ఛేదం (హారం)చేత ఛేదాన్ని వేరువేరుగా గుణించి ఈ లవ లబ్ధాన్ని, హారలబ్ధాన్ని భిన్నంగా రాస్తే, ఈ భిన్నమే ఇచ్చిన భిన్నాల గుణలబ్ధం అవుతుంది.

ఉదాహరణ $\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}=\frac{2\times5}{3\times9}=\frac{10}{27}$

గుణలబ్ధంలో లవ, హారాలమధ్య ఉమ్మడి భాజకం ఉంటే దానితో లవహారాలను భాగించి, భిన్నాన్ని సూక్ష్మీకరిస్తాము. ఈ పద్ధతిని అపవర్తనం (Cross multiplication and simplification) అంటారు.

క. పలమెుదుకర్పూరమునకు
వెల మాడ చతుస్త్రిభాగవిత్తం బైనన్
బలపంచత్ర్యంశమునకు
వెల మా కెఱిఁగింపు గణితవిద్యానిలయా. 2

౧- 3/౪ ; 3/౫ - లబ్ధచిన్నాలు ౪ పాతికలు ౨.

పలం, కర్పూరం వెల చతుస్త్రిభాగ ధనం అంటే $\frac{3}{4}$ మాడలు అయితే పంచత్ర్యంశఫలాలు అంటే $\frac{3}{5}$ పలాల వెలఎంత?

పలం కర్పూరం వెల $\frac{3}{4}$ మాడలు–మాడ ఆనాటి బంగారుకాసు

$\frac{3}{5}$ పలాలవెల $\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$ మాడలు (1)

ఆనాటి కోలమానం : 1 మాడ = 10 చిన్నాలు

1 చిన్నం= 4 పాతికలు/పాటికలు.

కాబట్టి (1)లో రాబట్టినవెల $\frac{9}{20}$ మాడలు= $\frac{9}{20}\times 10$ చిన్నాలు

అంటే $\frac{9}{2}$ చిన్నాలు $\rightarrow$ 4 చిన్నాలు+ $\frac{1}{2}$ చిన్నం

$\rightarrow$ 4 చిన్నాలు+2పాటికలు

క. పలమెఁదుకుంకుమమునకును
వెల సప్తత్ర్యంశహేమవిత్తంబైనన్
బలషట్కపంచకమునకు
వెల యెంత యెఱుంగఁ జెప్పు వినుతచరిత్రా. **3**

ఒడ్డు ౧ $\frac{౩}{౭}$; $\frac{౫}{౬}$ లబ్ధచిన్నాలు ౩ పాతికలు ౨ వీసం ౧ పరలు ౨ భాగాలు ౧౨.

ఒకపలం కుంకుమవెల $\frac{3}{7}$ మాడలు, $\frac{5}{6}$ పలాల కుంకుమ వెలఎంత?

చెల్లించవలసినది $\frac{3}{7} \times \frac{5}{6}$ మాడలు

అంటే $\frac{5}{14}$ మాడలు $= \frac{5}{14} \times 10$ చిన్నాలు

$\frac{25}{7}$ చిన్నాలు

$=3$ చిన్నాలు$+ \frac{4}{7}$ చిన్నాలు

$=3$ చిన్నాలు$+ \frac{16}{7}$ పాటికలు

$=$ చిన్నాలు3, పాటికలు$2, + \frac{2}{7}$ పాటికలు

క. పలమెఁదుచందనమునకును
వెల పంచకయుగ్మహేమవిత్తం బైనన్
బలమష్టపంచకమునకు
[1]వెల యగుకనకం బదెంత విద్వన్మహితా. **4**

ఒడ్డు ౧ $\frac{౨}{౫}$; $\frac{౫}{౮}$ లబ్ధచిన్నాలు ౨ పాతికలు ౨.

ఒకపలం చందనం వెల $\frac{2}{5}$ మాడలు

$\frac{5}{8}$ పలాల చందనం వెల$= \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{4} =$ 2చిన్నాలు+2పాటికలు

1) వెలయఁగ నాకనక మెంత.

క. ఒకమాడకర్ధపాద
త్రికపలకర్పూరమైనఁ దెలియఁ ద్రిభాగ
ద్వికపాదమైనమాడకు
నకుటిల! కర్పూర మెంతయగు గణితజ్ఞా. **5**

ఒడ్డు ౧ $\frac{౧}{౨}$ $\frac{౩}{౪}$; $\frac{౨}{౩}$ $\frac{౧}{౪}$ – లబ్ధకర్పూరఫలభాగాలు $\frac{౧}{౧౬}$.

ఒక మాడకు పలం $\frac{3}{4}$ వంతులో సగం కర్పూరం లభిస్తుంది – అయితే పావుమాడలో $\frac{2}{3}$ భాగానికి ఎంత కర్పూరం లభిస్తుంది?

ఒక మాడకు $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ పలాలు కర్పూరం లభిస్తుంది.

$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ మాడకు ఎన్ని పలాలు?

లభించే కర్పూరం$= \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$ పలాలు.

తే. పరగ వెల మాడ కస్తూరి పలమునరయుఁ
బాదభాగత్రయం బైనభంగి మీకుఁ
దెలియ నవమాష్టభాగతృతీయభాగ
మైనమాడకు నదియెంత యయ్యెఁ జెపుమ. **6**

ఒడ్డు ౧– $\frac{౧}{౨}$ $\frac{౩}{౪}$; $\frac{౮}{౯}$ $\frac{౧}{౩}$ – లబ్ధకస్తూరిఫలభాగాలు $\frac{౧}{౯}$.

$\frac{1}{2}$ పలంలో $\frac{3}{4}$ భాగం కస్తూరివెల 1 మాడ అయితే $\frac{8}{9}$ లో $\frac{1}{3}$ మాడకు ఎంత కస్తూరి వస్తుంది –

లభించే కస్తూరి $\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{8}{9} \times \frac{1}{3}\right)$ పలాలు

$= \frac{1}{9}$

క. మాడకు నగరుపలాష్టక
మేడింట నవాంశ [1]కముల నేనైనక్రియన్
మాడ దశమాంశనవకము
పాడిగ నర్ధార్ధమైన ఫలమెంత యగున్. 7

ఒడ్డు ౧ - ౭/౮ ౫/౯; ౯/౧౦ ౧/౨ ౧/౨ - లబ్ధఅగరుభాగాలు ౭/౬౪.

ఒక మాడకు, $\frac{7}{8}$ లో $\frac{5}{9}$ పలం అగరు లభిస్తుంది – మాడలో $\frac{9}{10}$ వంతులో సగంలో సగానికి ఎంత అగరుకొనవచ్చు?

$\left(\frac{7}{8}\times\frac{5}{9}\right)\times\left(\frac{9}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$ పలాల అగరుకొనవచ్చు అంటే $\frac{7}{64}$ పలాలు.

ఆ. జగతిఁ జిన్నమునకు సప్తమషణ్ణవ
మాష్టఫలవిభాగమైన శొంఠి
చిదుపలైనఁ జిన్న మది చతుస్త్రికవర్గ
భాగమైన వాని ఫలముఁ జెపుమ. 8

ఒడ్డు ౧ ౬/౭ ౮/౯; ౩/౪ ౩/౪ - లబ్ధఅగరుభాగాలు ౩/౭.

శొంఠి ఒక చిన్నానికి $\frac{6}{7}$ పలంలో $\frac{8}{9}$ భాగం కొనగలిగితే $\frac{3}{4}$ లో $\frac{3}{4}$ వంతు చిన్నానికి ఎంత శొంఠిని కొనగలము?

$\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{7}$ పలాలశొంఠి

రూపభాగానుబంధసూత్రము

పూర్ణాంకానికి భిన్నం చేరి ఉండటం అంటే $3+\frac{1}{2}$

లేదా $3-\frac{1}{2}$ సందర్భాలను వివరించే సూత్రం.

1. కంబు కేనైనక్రియన్.

క. ఛేదమునకు బరిరూపం
[1]బాదరమునఁ బెంచి యంశ మది గూడుము హీ
నోదయ మెఱింగి పుచ్చుము
వేదితరూపాంశబంధ[2]విధి కమరంగన్. 9

"ఛేదమునకు (భిన్నములు), పరిరూపమును (హారమును) పెంచి అంశము (లవము)ను కూడి హీనోదయము (లబ్ధము)ను తెలిసికొని వేదిత రూపాంశవిధి – తెలుసుకోవలసిన లబ్ధఫలితమును గుణించి తెలుసుకొనుము "–(విద్వాన్ గొట్టుముక్కల)

క. పలమొఁడు కర్పూరమునకు
వెల రెండర మాడలైన విఖ్యాతముగా
నిలఁ బాదయుక్త మగుష
ట్పలములకును మాడ లెన్ని పరికింపంగన్. 10

ఒడ్డు ౧ - ౨ ౧/౨; ౬ ౧/౪ - లబ్ధగద్దెలు (మాడలు) ౧౫ చిన్నాలు ౬ పాతికలు ౧

ఒక పలం కర్పూరానికి వెల రెండున్నరమాడలు $2\frac{1}{2}$ మాడలు పాద యుక్తమగు షట్పలములకు అంటే $6\frac{1}{4}$ పలాల వెల ఎంత?

$$2\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{4} \rightarrow \frac{5}{2}\times\frac{25}{4}=\frac{125}{8}$$

= 15 మాడలు 6 చిన్నాలు. 1 పాతిక.

క. పలమొఁడు కస్తూరికి మా
డలు రెండుఁ ద్రిభాగముల నొడంబడ రెండున్
వెలయైనఁ బంచమాన్విత
ఫలములు పదునాలుగింటిఫల మెంత యగున్. 11

1. బాధారంబునను బెంచి యది గూడుము.
2. విధిక మెఱుంగన్.

ఒడ్డు ౧-౨ $\frac{౨}{౩}$; ౧౪ $\frac{౧}{౫}$ - లబ్ధగద్దెలు ౩౭ చిన్నాలు ౮ పాతికలు ౨ వీసాలు ౨ కాసులు ౨ భాగాలు $\frac{౨}{౩}$

ఒక పలం కస్తూరి వెల $2\frac{2}{3}$ మాడలయితే $14\frac{1}{5}$ పలాల ఖరీదెంత?

మాడలు $2\frac{2}{3}\times 14\frac{1}{5} \rightarrow \frac{8}{3}\times\frac{71}{5} = \frac{568}{15}$

$= 37\frac{13}{15}$ మాడలు

ఇదివరలో పేర్కొన్న ద్రవ్యమానానికి ఈ కిందివి చేరిస్తే

1 పాతిక = 4వీసాలు

1 వీసం = 4కాసులు

కావలసిన కస్తూరిఖరీదు 37 మాడలు 8 చిన్నాలు 2 పాటికలు 2 వీసాలు 2 కాసులు $\frac{2}{3}$ భాగాలు.

క. [1]**ధరణిఁ జిన్నమునకుఁ దగువెల దళహీన**
మైనశొంఠి [2]పలమెఁ డైనఁ బంచ
భాగరహిత మైనపదమూఁడు చిన్నాల
కెంత శొంఠి వచ్చు[3] నెఱుఁగఁ జెపుమ. **12**

ఒడ్డు ౧-$\frac{౧}{౨}$; ౧౩-$\frac{౧}{౫}$ - లబ్ధశౌంఠిఫలములు ౬ $\frac{౪}{౧౦}$.

ఇక్కడ దళము అంటే సగము అనగా $\frac{1}{2}$

దళము+దళము=1

దళహీనము= $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

1. ధరణిఁ జిన్నమునకు ధరయును; జగతిఁ జిన్నమునకు దగువెల
2. పలమెఁడయ్యేనేని; యమ్ములైనఁబంచ
3. నేర్పరింపు; నేర్పడంగ

దళహీనమైనశొంఠి అంటే $\frac{1}{2}$ పలం శొంఠి వెల 1 చిన్నం అయితే పంచభాగరహితమైన పదమూడు చిన్నాల అంటే $13-\frac{1}{5}=\frac{64}{5}$ చిన్నాలకు ఎంతశొంఠి కొనవచ్చునన్నది సమస్య -

$\frac{1}{2}\times\frac{64}{5}=\frac{32}{5}$ పలాలు

$= 6\frac{2}{5}$ పలాలు

క. **పలమెఁడు పిప్పళ్లకుఁ దగు**
వెల చిన్నంబులు త్రిభాగవికల మయినరెం
డిలఁ బంచ[1]షడంశోనిత
పలసప్త [2]దశమున కెంత పసిఁడి యగు నిలన్. **13**

లబ్ధమాడలు ౨౬ చిన్నాలు; ౯ పాతిక ౧ వీసాలు ౩ భాగాలు $\frac{౧}{౯}$.

పలముపిప్పళ్ళవెల త్రిభాగవికలమైన రెండు= $\left(2-\frac{1}{3}\right)$ చిన్నాలు

పంచషడంశోనిత సప్తదశకం= $\left(17-\frac{5}{6}\right)$ పలముల వెల ఎంత?

$=\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(17-\frac{5}{6}\right)$

$=\frac{5}{3}\times\frac{97}{6}=\frac{485}{18}$ మాడలు

= 26మాడలు-9చిన్నాలు-1పాటిక-3వీసాలు+$\frac{1}{9}$ భాగాలు.

భాగానుబంధకరణ సూత్రము

క. **ఛేదమునఁ బెంపు మగ్ర**
చ్ఛేదము హీనోదయంబుచే సహితాంశ
చ్ఛేదమునఁ దదగ్రాంశం
బారదమునఁ బెంపు బహుకళాన్వయవిధికిన్. **14**

1. షడన్విత మౌ
2. దశకము కెంత.

ఈ పద్యంలో సూచించబడిన సూత్రీకరణలో స్పష్టత లోపించింది. భావం ఫలానా అని తెలియడానికి వీలుకానంత అస్పష్టత –

గీ. అవనిఁ జిన్నమునకు నగరుమూల్యంబుష
ట్కస్వదళిత వర్జితస్వపాద
[1]సహితమైన...................తృ
తీయయుగ్మమునకుఁ దెలియఁ జెప్పు. 15

ఒడ్డు ౧ – $\frac{౧}{౬}$ $\frac{౧}{౨}$; $\frac{౧}{౪}$ $\frac{౧}{౩}$ – లబ్ధఅగరుఫల భాగాలు $\frac{౫}{౧౮}$.

పద్యం అసంపూర్ణం, కాబట్టి సమస్యయొక్క స్వరూపంలో స్పష్టతలేదు. అర్థమైనంతవరకు సమస్యను రాబట్టడం జరిగింది – మనోరంజనీ వ్యాఖ్యాత అంటారు.

“ $= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{24}$ ”

ఇక్కడ కూడా స్పష్టతలేదు.

విద్వాన్ గొట్టుముక్కల సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రిగారి వ్యాఖ్య. “చిన్నమునకు అగరువెల.

షట్క $\frac{1}{6}$, స్వదళిత $\frac{1}{2}$ వర్జిత స్వపాద $\frac{1}{4}$ అయిన తృతీయ యుగమ్మునకు. $\frac{1}{3}$. కవి $\frac{1}{3}$ అని చూపించినాడు. యుగ్మశబ్దం 2ను సూచిస్తుంది. అప్పుడు అని $\frac{2}{3}$ చెప్పుకోవాలి. కాని జవాబు $\frac{1}{3}$ అనే తేల్చి) $=\frac{5}{18}$ అగమపలమని తేల్చాడు” – ఇక్కడ కూడా అస్పష్టత అట్లాగే ఉన్నది.

క. ఇలఁ జిన్నమునకుఁ గుంకుమ
ఫలపాదాంశస్వ పంచభాగస్వతృతీ

1. దితసహితములైన తృతీయోన్నతతృ?

యలవయుతమైనఁ జిన్నము
దళసహితత్ర్యంశమునకుఁ దానెంత యగున్. 16

ఒడ్డు ౧ – $\frac{౧}{౪}$ $\frac{౧}{౫}$ $\frac{౧}{౩}$; $\frac{౧}{౨}$ $\frac{౧}{౩}$ – లబ్ధఅగరుఫల భాగాలు $\frac{౪}{౧౫}$.

పద్యంలో అన్వయక్లిష్టత ఉన్నందున సమస్య ఖచ్చితంగా ఫలానా అని తెలియడంలేదు – అర్థమైనంతవరకు మనోరంజనీ వ్యాఖ్యలో ఉన్న వివరణ చూద్దాం.

“కుంకుమ ! చిన్నానికి $\frac{1}{5}$ సాంశయుతమైన $\frac{1}{4}$,

స్వాంశయుతమైన $\frac{1}{4}$ పలాలు లభిస్తున్నది.

స్వాంశయుతమైన $\frac{1}{2}$ చిన్నానికి వచ్చే కుంకుమ ఎంత?

న్యాసం$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{19}{30}$

చిన్నాలు $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

∴ లభించే కుంకుమ$=\frac{19}{30}\times\frac{2}{3}=\frac{19}{45}$ పలాలు”

బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రిగారు లెక్కించినది $\frac{4}{15}$ లబ్ధకుంకుమ భాగాలు!

క. అర్ధస్వభాగసహిత
స్వార్ధపలాంశములు రూకచందనమైనన్
వర్ధితగుణత్రిపాద
స్వార్ధం బగురూక కెంత చందన మయ్యెన్. 17

౧ – $\frac{౧}{౨}$ $\frac{౧}{౨}$; $\frac{౩}{౪}$ $\frac{౧}{౨}$ – లబ్ధచందనఫలములు ౧౪౦ భాగాలు $\frac{౩}{౭౨}$

పై సమస్యలో ఉన్నట్లే ఇక్కడ కూడా అన్వయక్లిష్టత, మనోరంజనీ వ్యాఖ్యకు, బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి ప్రభాకరశాస్త్రి, లెక్కకు వ్యత్యాసం ఉన్నది.

మనోరంజనీ వ్యాఖ్యలో

"ఒక రూపాయికి $\frac{1}{2}$ స్వాంశయుతమైన $\frac{1}{2}$ పలాల చందనం అమ్ముతున్నారు.

$\frac{1}{2}$ స్వాంశకమైన $\frac{3}{4}$ రూపాయికి ఎంత చందనం కొనవచ్చు?

న్యాసం $\frac{1}{2}$ స్వాంశకమైన $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$ పలాలు

$\frac{1}{2}$ స్వాంశకమైన $\left(\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}=\frac{7}{8}\right)$రూపాయలు.

లభించే చందనం $\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}=\frac{21}{32}$ పలాలు.

ఇది కలా సవర్ణంబునందు భిన్న గుణకారము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్నగణితము

భాగహారము.

వ. అందు భిన్నగణితంబునందు భాగహార జాతియందుఁ గరణసూత్రం బెట్టిదనిన;

భిన్నగణితంలో భాగహారం చేసే పద్ధతి ఎట్టిదో మల్లన వివరిస్తున్నాడు.

క. ఛేదమున భాగహార
ఛ్ఛేదము లంశములఁ జేసి [1]చేరిన భాజ్య
ఛ్ఛేదాంశగుణితమై త
ఛ్ఛేదాప్తిని భాగహారసిద్ధి [2]వెలుంగున్. 1

టీక. పాలుగొన హారరాశి ఛేదాంశలు తిరుగవేసి యంశచ్ఛేదముగా నున్న ఛేదము అంశముగానున్న పెట్టుకొని ఆ అంశచ్ఛేదాలచేతను భాజ్యరాశి యంశను గుణించి, ఛేదాన్ని గుణించి అగుణితచ్ఛేదానము అంశపాల్గొనగాను వచ్చిన లబ్ధము భిన్నభాగహారఫలము.

ఛేదమంటే భిన్నం

లవాలతో అన్యహారాలను గుణించి వచ్చిన లబ్ధాలనే లవహారాలుగా రాస్తే, లభించే భిన్నమే భాగఫలము.

ఆధునిక సంకేతాలలో $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\rightarrow a\times d=ad$ మరియు

$$c\times b=bc$$

ad, be లు లవహారాలుగా రాయండి. అంటే $\frac{ad}{bc}$ మనకు కావలసిన భాగపలం దీనినే ఇంకోవిధంగా చెప్పవచ్చు.

1. చెల్లిన 2. చెలంగున్.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

గమనిక: ప్రస్తుతం మనం ఒక భిన్నాన్ని మరోభిన్నంతో భాగించవలసినప్పుడు మహావీరాచార్యుడు, మల్లనలు చెప్పిన పద్ధతినే పాటిస్తున్నాము.

క. **అరపలమెౘడు కస్తూరికిౘ**
బరగంగా మాడ పాదభాగత్రిక మి
ద్ధరనైన నొక్కపలమున
కరయంగా మాడ లెన్ని యగు గణితజ్ఞా. **2**

ఒడ్డు $\frac{౧}{౨}$; $\frac{౩}{౪}$ ౧ **– లబ్ధమాడ** ౧ **చిన్నాలు** ౫.

$\frac{1}{2}$ పలం కస్తూరి ఖరీదు పాదభాగత్రికము అంటే $\frac{3}{4}$ మాడలు ఒక పలం ఖరీదెంత?

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$ మాడలు అంటే 1 మాడ 5 చిన్నాలు.

క. **ఎనిమిదిపలములునరచం**
దనమునకును జిన్నములును దళవర్జితమై
చనునిరువది వెలయైనను
విను పలమెౘడు చందనంబు వెల యెంత యుగన్. **3**

ఒడ్డు ౮ $\frac{౧}{౨}$ ౧౯ $\frac{౧}{౨}$ ౧ **లబ్ధచిన్నాలు** ౨ **పాతిక** ౧ **భాగాలు** $\frac{౧౨}{౧౭}$.

$8\frac{1}{2}$ పలముల చందనం ధర దళవర్జితమై చను నిరువది అంటే $\frac{1}{2}$ తక్కువైన 20 అంటే $19\frac{1}{2}$ చిన్నాలు. ఒకపలం చందనం వెలఎంత?

$8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ పలాలచందనం ధర $19\frac{1}{2} = \frac{39}{2}$ చిన్నాలు

1 పలం చందనం ధర $= \frac{39}{2} \times \frac{2}{17} = \frac{39}{17}$

$= 2\frac{5}{17}$ చిన్నాలు

$= 2$ చిన్నాలు 1 పాతిక $\frac{12}{17}$ భాగలు (వీసాలు)

క. **దలసహిత మైనపదిమూౘ**
ద్పలముల కొకచిన్నమైనౘ [1]బరగౘగ మతీ యా
[2]పలశతక మైనయగరుకు
వెల యెంతగుౘ జెప్పవయ్య! వినుతచరిత్రా! **4**

౧౩ $\frac{౧}{౨}$; ౧ ౧౦౦ **లబ్ధచిన్నాలు** ౭ **పాతిక** ౧ **వీసాలు** ౨ **కానులు** ౨ **భాగాలు** $\frac{౨}{౨౭}$.

దలసహితమైన పదిమూడ్పలములు అంటే $13\frac{1}{2}$ పలముల అగరుధర 1 చిన్నము అయితే 100 పలముల ధర ఎంత?

$\frac{2}{27} \times 100 = \frac{200}{27}$ చిన్నాలు $= 7\frac{11}{27}$ చిన్నాలు

$= 7$ చిన్నాలు 1 పాతిక 2 వీసాలు 2 కాసులు

$= \frac{2}{27}$ కాసులు (భాగాలు).

క. **అతిశయముగౘ బాదత్రయ**
యుతమగు పంచదశపలము లొకమాడకు నీ
[3]క్షితి వెలయైనను జందన
శతపలముల కెంత వచ్చు నద్గుణనిలయా! **5**

౧౫ $\frac{౩}{౪}$; ౧ ౧౦౦ **లబ్ధమాడలు** ౬ **చిన్నాలు** ౩ **పాతిక** ౧ **వీసాలు** ౩ **కానులు** ౩ **భాగం** $\frac{౩౧}{౬౩}$.

---

1. పరగంగా నా 2. పలకశతకమునకు నగరుం 3. క్షితిలోపలైనౘ జందన.

పాదత్రయ పంచదశపలముః= $15\frac{3}{4}$ చందనము వెల 1 మాడ 100 పలముల చందనము వెల ఎంత?

$100\times\frac{4}{63}$ మాడలు. అంటే $\frac{400}{63}$ మాడలు.

= 6 మాడలు, 3 చిన్నములు, 1 పాతిక, 3 వీసాలు, 3 కానులు+ $\frac{31}{63}$ భాగం

క. వెలయఁ ద్రిభాగయుతచతు
ష్పలముల కస్తూరి కేదుభర్మంబులతోఁ
గలిసిన చిన్నము పాతిక
వెలయఁగఁ[1] బలమెంటి కెంత విత్తం బయ్యెన్. 6

౪ $\frac{౧}{౩}$; ౭ $\frac{౧}{౮}$ లబ్ధమాడ ౧ చిన్నాలు ౬ పాతిక ౧ వీసాలు ౩ భాగం $\frac{౪}{౧౩}$.

త్రిభాగయుత చతుః అంటే $4\frac{1}{3}$ పలముల కస్తూరి ఖరీదు ఏడు భర్మములతో కూడిన ఒక చిన్నము 1 పాతిక అయితే పలం కస్తూరి ఖరీదెంత?

1 చిన్నము 1 పాతిక= 5 పాతికలు

1 మాడ= 10 చిన్నాలు, 1 చిన్నము=4 పాతికలు

కాబట్టి 1 మాడ= 40 పాతికలు

1 చిన్నము 1 పాతిక = 5 పాతికలు $=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$ మాడలు ఇప్పుడు పలాలవెల $4\frac{1}{3}$ మాడలు $7\frac{1}{8}$

1 పలంవెల= $\frac{7\frac{1}{8}}{4\frac{1}{3}}$ మాడలు

$=\frac{57}{8}\times\frac{3}{13}=\frac{171}{104}$ మాడలు అంటే $1\frac{67}{104}$ మాడలు.

1. పలమొంటి; ఫలమొకటి.

= 1 మాడ, 6 చిన్నములు, 1 పాతిక, 3 వీసాలు, $\frac{4}{13}$ కానులు (భాగం)

గీ. స్వార్ధదశకత్రిభాగంబు సంయుతస్వ
పాదపంచమషష్ఠసప్తమము లోలిఁ
గలయ ఫలభాగ లవి మాడగాఁగ సప్త
[1]ఫలదశకమున మున (కుమ) నెంత విలువ వచ్చు. 7

లబ్ధమాడలు ౫౦ చిన్నాలు ౧ పాతికలు ౨ వీసాలు ౩ కాని ౧ భాగాలు $\frac{౬}{౭}$.

కవి ఉద్దేశించిన భిన్నాలు ఫలానా అని తెలియని అస్పష్టత – కాబట్టి కవి ఆశించిన సమస్యద్యోతకం కావటంలేదు.

క. కలితాష్ట సప్తమాష్టమ
ఫలకుంకుమభాగములకుఁ బరికింపంగా
వెల మాడయైన దళయుత
ఫలపంచశతంబునకును భర్మం బెంతో. 8

$\frac{౧}{౮}$ $\frac{౧}{౫}$ ౧ – ౫౦౦ $\frac{౧}{౨}$ **లబ్ధమాడలు** ౩౫౩ **చిన్నాలు** ౫

ఈ సమస్యలో కూడా అస్పష్టదత్తాంశమున్నది –

బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి వారి పరిష్కృతప్రతిలో సాధన 353 మాడలు 5 చిన్నములని ఉన్నది. అంటే $500\times\frac{1}{2}$ పలముల కుంకుమఖరీదు $353\frac{1}{2}$ మాడలు.

దీని ప్రకారం 1 మాడకు లభించే కుంకుమ $\frac{1001}{2}\times\frac{2}{707}$ పలాలు

$=\frac{1001}{707}\times\frac{143}{101}$ పలాలు

1. ఫలశతకమునకును. ఇది సరిగాఁ గుదురలేదు.

దత్తాంశంలో “కలితాష్ట సప్తమాష్టమ భాగములన్నారు. అంటే $\frac{143}{101}$ ని అష్టమ సప్తమి అష్టమ భాగాలనుండి రాబట్టవలె. ఇందులో హారసంఖ్య 101 ప్రధాన సంఖ్య అని గమనించండి. ఈ భిన్నాన్ని దత్తాంశం ప్రకారం ఎలా రాబట్టాలి?” –

ఇది సారసంగ్రహగణిత శాస్త్రంబునందు ద్వితీయ భిన్న భాగహారము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్నగణితము

వర్గము.

వ. అందుఁ దృతీయవర్గుజాతియందుఁ గరణసూత్రం బెట్టిదనిన;

భిన్నగణితంలో మూడవప్రక్రియ వర్గువు సాధించే విధానాన్ని మల్లన వివరిస్తున్నాడు.

క. వెలయఁగ నంశచ్ఛేదం
బులు మును వర్గించి యంశములవర్గ మధః
కలితమగు ఛేదకృతిఁ బా
లలయక కోన భిన్న [1]వర్గమగు నేర్పడఁగన్. 1

భిన్నములోని లవం (అంశం) వర్గాన్ని లవంగాను, హారం (ఛేదము) వర్గాన్ని హారంగాను రాస్తే, ఏర్పడే భిన్నాలు ఇచ్చిన భిన్నానికి వర్గము. సంకేతాలతో $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

గీ. [2]ఒనరఁ బంచార్ధ సప్తార్ధమును నవార్ధ
భాగమును ద్రయోవింశతిపాదభాగ
మును [3]జతుర్దశత్ర్యంశంబు మదముతోడఁ
గదియ వర్గంబుఁ గొని చెప్పు గణక! మాకు. 2

౫/౨ ౭/౨ ౯/౨ ౨౩/౪ ౧౪/౩ **లబ్ధవర్గువులు** ౬ ౧/౪ ; ౧౨ ౧/౪; ౨౦ ౧/౪; ౩౩ ౧/౧౬ ; ౨౧ ౭/౯

పంచార్ధ= $\frac{5}{2}$, సప్తార్ధ= $\frac{7}{2}$, నవార్ధ= $\frac{9}{2}$

త్రయోవింశతిపాదభాగం= $\frac{23}{4}$, చతుర్దశత్ర్యంశ= $\frac{14}{3}$

1. వర్గువగు 2. ఒనరఁగా విను పంచార్ధమును నవార్ధ 3. జతుర్ధాంశ

ఈ భిన్నాలకు వర్గాలు చెప్పండి?

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5\times 5}{2\times 2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7\times 7}{2\times 2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9\times 9}{2\times 2} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{23}{4}\right)^2 = \frac{23\times 23}{4\times 4} = \frac{529}{16} = 33\frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{14\times 14}{3\times 3} = \frac{196}{9} = 21\frac{7}{9}$$

గీ. **అతిశయముగఁ ద్రిభాగయుతాష్టకృతియుఁ**
బంచమాంశసమన్వితపంచ (షష్ఠ)
నవచతుర్భాగ సంయుతనాగనయన
సంఖ్యయును జెప్పు వర్గించి సవినయముగ. **3**

౬౪ ౧/౩ ౬౫ ౧/౫ ౨౮ ౪/౯ **లబ్ధవర్గువులు** ౪౧౩౮ ౭/౯; ౪౨౫౧ ౧/౨౫ ; ౮౦౯ ౭/౮౧

కృతి అంటే వర్గువు. అష్టకృతి= 8×8=64

త్రిభాగయుత అష్టకృతి= $64\frac{1}{3}$

పంచమాంశ సమన్విత పంచషష్ఠ= $65\frac{1}{5}$

నవచతుర్భాగ సంయుత నాగనయన సంఖ్య= $28\frac{4}{9}$ ఈ మూడింటిని వర్గించండి

$$\left(64\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{193\times 193}{3\times 3} = \frac{37249}{9} = 4138\frac{7}{9}$$

$$\left(65\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{326\times 326}{5\times 5} = \frac{106276}{25} = 4251\frac{1}{25}$$

$$\left(28\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{256\times 256}{9\times 9} = \frac{65536}{81} = 809\frac{7}{81}$$

క. **ఏకాదశాంశయుతమై**
ప్రాకటముగఁ బంచకృతియుఁ* బంద్రెండు ఫలా
లాకదితమైనషట్కృతి
చేకొని వచ్చినఫలంబుఁ జెప్పుము మాకున్. **4**

౨౫ ౧/౧౧ ౩౬ ౧/౧౨ **లబ్ధవర్గువులు** ౬౨౯ ౬౭/౧౨౧ ; ౧౩౦౨ ౧/౧౪౪

ఏకాదశాంశయుతమైన పంచకృతి= $25\frac{1}{11}$ (1)

పంద్రెండు పలాలాకదిత షట్కృతి= $36\frac{1}{12}$ (2)

స్పష్టతలోపించిన సమాసాలను ఈ విధంగా అర్థాన్ని ఆపారించి గ్రహించడం బ్రహ్మశ్రీ వేటూరి వారి ప్రతిభ –

ఈ (1), (2) మిశ్రమభిన్నాల వర్గములు గణించాలి.

$$\left(25\frac{1}{11}\right)^2 = \left(\frac{276}{11}\right)^2 = \frac{276\times 276}{11\times 11} = \frac{76176}{121} = 629\frac{67}{121}$$

$$\left(36\frac{1}{12}\right)^2 = \left(\frac{433}{12}\right)^2 = \frac{433\times 433}{12\times 12} = \frac{187489}{144} = 1302\frac{1}{144}$$

ఇది సారసంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందుఁ దృతీయ భిన్నవర్గువు సమాప్తము.

* * *

* ౧/౧౨ అని యర్థము రావలెను. "పంద్రెండు ఫలాలాకదితమైన" అనుచో నీ యర్థము రాదు. అయితే కవియ ఉద్దేశము మాత్ర మదియే.

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్నగణితము

వర్గమూలము.

వ. **అందుఁ జతుర్థవర్గమూలజాతియందుఁ గరణసూత్రం బెట్టిదనిన;**

నాల్గవదైన వర్గమూలమును గురించి వివరించడం జరుగుతుంది.

క. **వితతచ్ఛేదాంశంబుల**
కృతిమూలముఁ గొని తదంశకృతిమూల మధః
కృతిమూలంబునఁ బాల్గొనఁ
గృతకృత్యం బయ్యె భిన్నకృతిమూలంబున్. **1**

ఇచ్చిన భిన్నముయొక్క వర్గమూలాన్ని కనుక్కోవడానికి, ఆ భిన్నంయొక్క లవవర్గమూలం లవంగా, హారవర్గమూలం హారంగా ఏర్పడిన భిన్నమే దత్తభిన్నవర్గమూలం అవుతుంది. సంజ్ఞలతో వివరిస్తే $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

క. **అమరఁగ షోడశభాగయు**
తము ముప్పదితొమ్మిదియును దగ నవమచతు
ష్కముతో నిరువదియెనిమిది
క్రమముగఁ గొన వర్గమూలగణ మెంత యగున్. **2**

౩౯ $\frac{౧}{౧౬}$; ౨౮ $\frac{౪}{౯}$ **లబ్ధవర్గమూలం** ౬ $\frac{౧}{౪}$; ౫ $\frac{౧}{౩}$

షోడశభాగయుతము ముప్పదితొమ్మిది= $39\frac{1}{16}$

నవమ చతుష్కంతో ఇరువది ఎనిమిది= $28\frac{4}{9}$

ఈ రెండు మిశ్రమభిన్నాల వర్గమూలములు చెప్పండి

$$\sqrt{39\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{28\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{256}{9}} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

క. **ఏకాశీత్యంశంబులఁ**
బ్రాకటముగ నలుబదాఱు పంచదశముతోఁ
జేకొని షట్కృతి భాగద
శాకృతియుం గొనగ మూలమది యెంత యగున్. **3**

౫౦ $\frac{౪౬}{౮౧}$; ౧౦ $\frac{౧}{౩౬}$ **లబ్ధవర్గమూలం** ౭ $\frac{౧}{౯}$; ౩ $\frac{౧}{౬}$

ఏకాశీతి అంశముల నలుబదారు పంచదశముతో అంటే $50\frac{46}{81}$ షట్కృతి భాగదశాకృతి అంటే $10\frac{1}{36}$

ఈ రెండు మిశ్రమ భిన్నాల వర్గమూలాలు రాయాలి.

$$\sqrt{50\frac{46}{81}} = \sqrt{\frac{4056}{81}} = \frac{\sqrt{4056}}{\sqrt{81}} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

$$\sqrt{10\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{361}{36}} = \frac{\sqrt{361}}{\sqrt{36}} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

గీ. **పరఁగ నలుబదితొమ్మిదిపాళ్ల యందుఁ**
బంచవింశతిభాగసంపన్నమైన
జలధిలోచనవారణసంఖ్య కెంత
వర్గమూలము సెప్పు ధ్రువంబుగాను. **4**

౮౨౪ $\frac{౨౫}{౪౯}$ **లబ్ధవర్గమూలము** ౨౮ $\frac{౫}{౭}$

పంచవింశతి భాగ సంపన్నమైన నలుబది తొమ్మిది పాళ్ళ గల జలధిలోచన వారణసంఖ్య = $824\frac{25}{49}$ వర్గమూలం?

$$\sqrt{824\frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{40401}{49}} = \frac{\sqrt{40401}}{\sqrt{49}} = \frac{201}{7} = 28\frac{5}{7}$$

ఇది సారసంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందుఁ జతుర్థ భిన్న వర్గమూలము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్నగణితము

ఘనము

వ. అందుఁ బంచమఘనజాతియందుఁగరణసూత్రం బెట్టి దనిన;

ఐదవ పరిచ్ఛేదంలో భిన్నం తాలూకు ఘనగణనం వివరింపబడింది.

క. వినుతచ్ఛేదాంశంబుల
ఘన మేర్పడఁ గొని తదంశఘన మిడితచ్ఛే
దనిరూపితఘనమునఁ బా
ల్గొనఁగా నది భిన్నఘనము కొమరుగ నయ్యెన్. 1

ఒక దత్తభిన్నాంక ఘనము రాబట్టడానికి, అభిన్నం తాలూకు లవంయొక్క ఘనం, హారంయొక్క ఘనం లెక్కించగా, వీటితో ఏర్పడే భిన్నం దత్తభిన్నానికి ఘన రూపం.

గీ. పరగ నవదళ సప్తార్ధ పంచదశత్రి
భాగ పదత్రయ షష్ఠసప్తమములఁ దగు
భాగములు త్రయోదశకాష్టభాగములును
దశత్రిభాగము ఘనమైన దానిఁ జెపుమ. 2

$\frac{౨}{౯}$, $\frac{౨}{౭}$, $\frac{౩}{౧౫}$, $\frac{౩}{౪}$, $\frac{౬}{౭}$, $\frac{౮}{౧౩}$, $\frac{౩}{౧౦}$ **ఘనము** $\frac{౮}{౭౨౯}$, $\frac{౮}{౩౪౩}$, $\frac{౨౭}{౩౩౭౫}$, $\frac{౨౭}{౬౪}$, $\frac{౨౧౬}{౩౪౩}$, $\frac{౫౧౨}{౨౧౯౭}$, $\frac{౨౭}{౧౦౦౦}$

నవదళ= $\frac{2}{9}$

సప్తార్ధ= $\frac{2}{7}$

పంచదశత్రిభాగ= $\frac{3}{15}$

పదత్రయ= $\frac{3}{4}$

షష్ఠసప్తమ= $\frac{6}{7}$

త్రయోదశకాష్ట= $\frac{8}{13}$

దశత్రిభాగ= $\frac{3}{10}$ వీటికి ఘనాలు కట్టండి.

$$\left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{2^3}{9^3} = \frac{8}{729}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3} = \frac{8}{343}$$

$$\left(\frac{3}{15}\right)^3 = \frac{3^3}{15^3} = \frac{27}{3375}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{6^3}{7^3} = \frac{216}{343}$$

$$\left(\frac{8}{13}\right)^3 = \frac{8^3}{13^3} = \frac{512}{2197}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{3^3}{10^3} = \frac{27}{1000}$$

క. **కదియంగ నెనిమిది వరకును**
బదునాలుగుతోనం బంచభాగంబునకుం
దుది ముప్పదియేనరకున్
విదితంబుగ ఘనముం జెప్పు విద్వన్మహితా. **3**

౮ $\frac{౧}{౨}$, ౧౪ $\frac{౧}{౫}$, ౩౫ $\frac{౧}{౨}$, **ఘనము** ౬౧౪ $\frac{౧}{౮}$, ౨౮౬౩ $\frac{౩౬}{౧౨౫}$,
౪౪౭౩౮ $\frac{౭}{౮}$

ఎనిమిదివరకు= $8\frac{1}{2}$

పదునాలుగుతోన పంచభాగము= $14\frac{1}{5}$

ముప్పదియేనరకు= $35\frac{1}{2}$ వీటిఘనాలు కట్టండి.

$$\left(8\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{17}{2}\right)^3 = \frac{4913}{8} = 614\frac{1}{8}$$

$$\left(14\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{71}{5}\right)^3 = \frac{357911}{125} = 2863\frac{36}{125}$$

$$\left(35\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{71}{2}\right)^3 = \frac{357911}{8} = 44738\frac{7}{8}$$

క. **దలసహితత్రికమునకున్**
సలలితపాదయుత మైననవసంఖ్యకు ని
ర్మల మగుమూఁడవపాలును
గలిగిననాల్గింటి కెంత ఘనసంఖ్య యగున్. **4**

౩ $\frac{౧}{౨}$, ౯ $\frac{౧}{౪}$, ౪ $\frac{౧}{౩}$ **ఘనము** ౪౨ $\frac{౭}{౮}$; ౭౯౧ $\frac{౨౯}{౬౪}$, ౮౧ $\frac{౧౦}{౨౭}$

దలసహితత్రికము= $3\frac{1}{2}$

పాదయుతమైన నవసంఖ్య= $9\frac{1}{4}$

మూడవపాలుగల్గిన నాల్గు= $4\frac{1}{3}$ ల ఘనం?

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8} = 42\frac{7}{8}$$

$$\left(9\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{37}{4}\right)^3 = \frac{50653}{64} = 791\frac{29}{64}$$

$$\left(4\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{13}{3}\right)^3 = \frac{2197}{27} = 81\frac{10}{27}$$

ఇది సారసంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందు పంచమ భిన్న ఘనము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్నగణితము

ఘనమూలము

వ. అందుఁ షష్ఠ ఘనమూల జాతియందుఁ గరణసూత్రం బెట్టి దనిన;

ఆరవ పరిచ్ఛేదంలో ఘనమూల గణనం చెప్పడమైనది.

క. వినుతచ్ఛేదాంశంబుల
ఘనమూలముఁ గొని తదంశఘనమూలముఁ జే
కొని తచ్ఛేదోత్తరమున
ఘనముగఁ బాల్గొన్న భిన్నఘనమూల మగున్. 1

ఒక దత్తభిన్నాంకం ఘనమూలాన్ని రాబట్టడానికి, ఆ భిన్నం తాలూకు లవంయొక్క ఘనమూలం హారంయొక్క ఘనమూలం గణించి, వీటితో ఏర్పడే భిన్నాన్ని దత్తభిన్నం ఘనమూలంగా పరిగణిస్తాము $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ దీనినే మల్లన ఛేద, అంశముల ఘనమూలములను కనుగొని అంశఘనమూలము గ్రహించి, ఛేదఘనమూలములో పాలుగొంటే ఘనమూలం లభిస్తుంది అంటున్నాడు.

క. మానైననూటయిరువది
యేనగుపాలు[1] పురవర్గ మేర్పడఁ గూడం
గాను దశగుణరసాష్టక
(?) ఘనాంకమూల మది యెంత గణితవిధిజ్ఞా. 2

$\frac{౧౨౫}{౮}$, $\frac{౭౨౯}{౮}$, **ఘనమూల లబ్ధము –** $\frac{౫}{౨}$, $\frac{౯}{౨}$

రసాష్టకము–9×8=72 – దశగుణము 720 – పురవర్గము 9 కూడగా 729

నూట యిరువది యేనగుపాలు= $\frac{125}{8}$

పురవర్గమేర్పడ – పురం అంటే 3, దీని వర్గం 9

పురవర్గం కూడిన దశగుణరసాష్టకం $= 3^2+10\times9\times8$

$= 9+720=729$

ఇక్కడ రెండో భిన్నాన్ని $\frac{729}{8}$ అనుకొని, ఈ రెండు భిన్నాల ఘన మూలాలు కనుక్కోవలె.

$$\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{729}{8}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

గమనిక : పద్యంలో సంఖ్యలను సూటిగా చెప్పలేదు – నాలుగవ పాదంలో మొదటి గణం సరిపోదు –

గీ. ప్రకటితాష్టకృత్యంశముల్ పదునొకంటఁ
గదియ నూటయేడిటిపైన విదితమైన
సప్తవింశతిదశభాగసహితమైన
కాలగగనేందుశశులకు మూల మెంత. 3

౧౦౭ $\frac{౧౧}{౬౪}$, ౧౧౦౩ $\frac{౧౦}{౨౭}$ **ఘనమూల లబ్ధాలు,** $\frac{౧౯}{౪}$; $\frac{౩౧}{౩}$

ప్రకటిత అష్ట కృత్యంశములు=8×8=64 అంకము.

పదునొకంట గదియ అంటే $\frac{11}{64}$

నూట ఏడిటిపైన విదితము అంటే $107\frac{11}{64}$

తరువాత సప్తవింశతి – దశభాగ అంటే $\frac{10}{27}$

కాల–3, గగన–0, ఇందు–1, శశి–1 అంటే 1103తో కలిసినది అంటే $1103\frac{10}{27}$

ఈ రెండు భిన్నాలకు ఘనమూలాలు కనుక్కోండి.

$$\sqrt[3]{107\frac{11}{64}} = \sqrt[3]{\frac{6859}{64}} = \frac{\sqrt[3]{6859}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$$

$$\sqrt[3]{1103\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{29791}{27}} = \frac{\sqrt[3]{29791}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$$

క. నవఘనభాగంబులఁ బది
భువనాంబరవహ్నినయనపుంజముతోడన్
బ్రవిమలముగఁ గూడినచోఁ
గవిజననుత! దీని కెంత ఘనమూల మగున్. 4

౨౩౦౧౪ $\frac{౧౦}{౭౨౯}$ **ఘనమూల లబ్ధము** $\frac{౨౮౪}{౯}$

నవఘనము=9×9×9=729

కాబట్టి నవఘనభాగంబులన్ పది= $\frac{10}{729}$

భువన–14, అంబర–0, వహ్ని–3, నయన–2 → 23014.

ఇక్కడ సమస్య= $23014\frac{10}{729}$ ఘనమూలం కనుక్కోవడం

$$\sqrt[3]{23014\frac{10}{729}} = \sqrt[3]{\frac{16777216}{729}} = \frac{\sqrt[3]{16777216}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{256}{9} = 28\frac{4}{9}$$

ఇది సారసంగ్రహ గణితశాస్త్రంబునందు షష్ఠభిన్న ఘనమూలము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్నగణితము

సంకలితము

వ. అందు సప్తమ సంకలితజాతియందుఁ గరణసూత్రం బెట్టి దనిన;

ఇదివరకటి ప్రకరణాలలో పూర్ణాంకశ్రేఢులపరంగా చెప్పిన సూత్రాలు భిన్నాంకశ్రేఢులకు వర్తిస్తాయి. ఈ ఏడవ పరిచ్ఛేదంలో వీటిని వివరించడం జరిగింది.

క. *పద మిష్టము చయహతమై
కది మఁగ నది ద్విగుణితాదిగఁ బ్రచయోనం
బది గూడఁ బదార్ధంబున
నదమలముగఁ బెంప భిన్నసంకలిత[1] మగున్. 1

“ఇష్టపద సంఖ్యను పదాంతరంతో గుణించి, రెండింతల ఆదిపదం కూడి, పదాంతరం తీసివేయాలి. ఫలితాన్ని సగం పదసంఖ్యతో గుణిస్తే భిన్నాలశ్రేఢికి సంకలితం వస్తుంది”

దీన్ని సంకేతాలతో రాస్తే $[nd + 2a - d]\frac{n}{2}$

నేడు పాఠ్యపుస్తకాలలో ఈ సూత్రాన్ని $\frac{n}{2}[2a + (n-1) - d]$ అని మనం చూస్తున్నాం.

పద్యం తాత్పర్యాన్ని చూద్దాం : ఇష్టపదము nను చయము dతో గుణించి, ద్విగుణితాదిగ అంటే ఆదిని రెట్టించి అంటే 2a, కదియగ అంటే కలిపి,

* ఇష్టపదమును చయముచే గుణించి, యాదిని రెట్టించి దానితోఁ గలిపి యందుండి ప్రచయమును దీసివేసి యిష్టపదార్ధముచే గుణించినచో భిన్నసంకలితధనము వచ్చును.

1. మొగిన్.

ప్రచయోనంబు అంటే దానినుండి ప్రచయమును, dని తీసివేసి, ఈ మొత్తాన్ని ఇష్టపదార్థము $\frac{n}{2}$ తో గుణిస్తే భిన్న సంకలితధనం వస్తుంది.

ఇక్కడ కవి ఉపయోగించిన సాంకేతికపదాలు గమనించండి.

క. [1]**అష్టత్ర్యంశక మాదిగ**
నష్టాంశకపంచకంబు నది యుత్తరగా
నష్టాదశపంచగతికి
నిష్టం బగుధనముఁ జెప్పు మిది యెంత యగున్. **2**

ఆది ౩/౮ **ఉత్తర** ౫/౮ **గచ్ఛ** ౫/౧౮ **లబ్ధధనం** ౨౧౫/౫౧౮౪

a=ఆది= అష్టత్ర్యంశకము= $\frac{3}{8}$ (అష్టాంశత్రికం)

d=ఉత్తర= అష్టాంశపంచకము= $\frac{5}{8}$

n =గచ్ఛ= అష్టాదశపంచగతి= $\frac{5}{18}$ అయితే సంకలితధనం S ఎంత?

ఈ విలువలను సూత్రంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

సంకలితధనం $S = \left[\frac{5}{18} \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{3}{8} - \frac{5}{8}\right] \frac{5}{2 \times 18}$

$= \frac{215}{5184}$

గమనిక : శ్రేఢులలో ఇష్టపదం n ధనపూర్ణాంకం. కానీ మల్లన దీనిని ధన భిన్నాంకంగా సూచించడం ఆయనలోని గణితసార్వత్రీకరణ తత్త్వాన్ని తెలియజేస్తున్నది –

క. **పరఁగఁగ నాది షడంశము**
నరయంగా ద్వ్యిత్రిభాగ మగు నుత్తరముం

1. అష్టాంశత్రిక మాదిగ.

జరణత్రితయము పద మగుఁ
దిరముగఁ బద మెంత వేగఁ దెలుపుము మాకున్. **3**

ఆది ౧/౬ **ఉత్తర** ౨/౩ **గచ్ఛ** ౩/౪ **లబ్ధధనం** ౧/౧౬

ఆది షడంశము అంటే $a = \frac{1}{6}$

ఉత్తర ద్వ్యిత్రిభాగము $d = \frac{2}{3}$

పదము (గచ్ఛ) చరణత్రయము $n = \frac{3}{4}$ అయితే

ఇక్కడ కూడా n ను భిన్నంగా తీసుకోవడం జరిగింది.

$S = \frac{3}{2 \times 4}\left[\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{16}$

గీ. **ఆది షష్ఠభాగత్రితయంబు ప్రచయ**
మేకవింశతిభాగాల నెనిమిది యగు
నమరఁ బద మష్టమాంశత్రయంబు దీని
కైన ధన మెంత యెఱిఁగింపు మతిశయముగ. **4**

ఆది ౩/౬ **ఉత్తర** ౮/౨౧ **గచ్ఛ** ౩/౮ **లబ్ధధనం** ౧/౭

a=ఆది షష్ఠభాగత్రితయంబు= $\frac{3}{6}$

d= ప్రచయము లేదా ఉత్తర= ఏకవింశతి భాగాల ఎనిమిది= $\frac{8}{21}$

n =(ఇష్ట)పదము అదే గచ్ఛ, అష్టమాంశత్రయంబు= $\frac{3}{8}$ అయితే ధనమెంత?

ఇక్కడ కూడా n భిన్నం – గమనించండి

$s = \left[\frac{3}{8} \times \frac{8}{21} + 2 \times \frac{3}{6} - \frac{8}{21}\right] \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$

$= \frac{16}{21} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{7}$

గీ. ఆది మూఁడు ప్రచయ మష్టసంఖ్యాపరి
మాణ మయ్యె గచ్ఛ మానుగాను
విస్తరించి చూప వింశతిభాగత్రి
యంబు దీని కెంత యయ్యెఁ జెపుమ. 5

ఆది ౩ **ఉత్తర** ౮ **గచ్ఛ** $\frac{౩}{౨౦}$ **లబ్ధధనం** $\frac{౬౬}{౨౫}$ (?)

ఆది= a =3, ప్రచయము= d =8 (అష్టసంఖ్యా పరిమాణం)

గచ్ఛ n = $\frac{3}{20}$ (ఇక్కడ కూడా n భిన్నం!)

అయితే ధనం s ఎంత?

$$S = (nd + 2a - d)\frac{n}{2}$$

$$= \left(\frac{3 \times 8}{20} + 2 \times 3 - 8\right)\frac{3}{2 \times 20} = \frac{3}{50}(?)$$

గమనిక : బ్రహ్మశ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రులవారు $S = \frac{66}{25}$ అని రాసి ప్రశ్నార్థకచిహ్నం తగిలించారు.

దత్తాంశం ప్రకారం =3, =8 అయితే ఇది పూర్ణాంకశ్రేఢి $3, 11, 19 \ldots$ ఇందులో $\frac{3}{20}$ పదాలు తీసుకొంటే సూత్రం ప్రకారం $\frac{-3}{50}$ మొత్తం (ఋణసంఖ్య!) వస్తున్నది!!

వ. ఇంక నిష్టధనాద్యుత్తరానయనసూత్రం బెట్టి దనిన;

ఆది, ఉత్తరలను కనుగొనే విధానము

క. *గణితమున [1]నిష్టధనముం
బ్రణుతముగాఁ గొన్నలబ్ధిఁ బ్రభవో త్తరలన్

---

* ఇష్టధనమును సంకలితధనముచేతఁ బాలుగొని వచ్చిన లబ్ధముచేత సంకలితాదిని గుణించినయెడల నిష్టధనమున కాది వచ్చును. ఆ లబ్ధముచేతనే సంకలితోత్తరను గుణించినయెడల నిష్టధనోత్తర వచ్చును. 1. దృష్ట.

గుణియించిన నిచ్ఛాధన
గుణభాగాద్యుత్తరములు గూడఁగ వచ్చున్. 6

కోరిన మొత్తానికి సరిపడే ఆది, ఈ పదాంతరాలను నిర్ణయించేపద్ధతి.

"ఇష్టధనమును సంకలితధనంతో భాగించి వచ్చిన లబ్ధముతో సంకలిత ఆదిని గుణిస్తే, ఇష్టధనానికి ఆది వస్తుంది. ఆ లబ్ధంతో సంకలిత ఆదిని గుణిస్తే, ఇష్ట ధనానికి ఆది వస్తుంది" –

$$\frac{\text{కోరిన మొత్తం}}{\text{ఇచ్చిన మొత్తం}} = \frac{S}{s} = \frac{A}{a} = \frac{D}{d}$$

కాబట్టి $A = a\frac{S}{s}$, $D = d\frac{S}{s}$

"ఒక అంకశ్రేఢి సంకలితం s, a, d లు దృష్టములైనప్పుడు అంటే దత్తాంశాలుగా ఇచ్చినప్పుడు, ఆ సంకలితాన్ని కొన్నిరెట్లు చేస్తే మరో సంకలితం ఏర్పడుతుంది కదా! దీన్ని s అందాం. సూత్రకారుడు దీన్ని ఇష్టసంకలితం అన్నాడు. ఇప్పుడు ఈ కొత్త సంకలితం s కు వర్తించే ఆది A, పదాంతరం D లను ఎలా కనుక్కోవాలో ఈ సూత్రం వివరిస్తుంది. పదసంఖ్యమాత్రం పాతదే ఉంటుంది".

గీ. ఏక మాది ప్రచయ మేకార్ధ మగు గచ్ఛ
షడ్పంచకమున జగతిఁ గన్న
ధనము దక్క నిష్టధనమున కర్కాంశ
సప్తసంఖ్య కాదిచయము లెంత. 7

ఆది ౧ **ఉత్తర** $\frac{౩}{౨}$ **గచ్ఛ** $\frac{౫}{౬}$ **లబ్ధధనం** $\frac{౩౫}{౪౮}$

ఇష్టధనం $\frac{౭}{౧౨}$ **లబ్ధాది** $\frac{౪}{౫}$ **లబ్ధోత్తర** $\frac{౬}{౫}$

ఏకమాది → ఆది– 1 → (a)

ప్రచయమేకార్ధము $-1\frac{1}{2}$ → (d) ఉత్తర

షష్ఠపంచకము – గచ్ఛ= $\frac{5}{6} \to$ (n)

ఇష్ట ధనము S = అర్కాంశ సప్తసంఖ్య= $\frac{7}{12}$అయితే ఆది A, చయము D లెంత?

$$S \ = \left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}+2-\frac{3}{2}\right)\frac{5}{2\times 6}=\frac{35}{48}$$

ఇప్పుడు $\frac{S}{s} \ =\frac{7}{12}\times\frac{48}{35}=\frac{4}{5}$

$$A = a\frac{S}{s}=1\times\frac{4}{5} \ =\frac{4}{5}$$

$$D = d\frac{S}{s}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{5} \ =\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

క. **ఏకార్ధ మాది యుత్తర**
యేకము పద మష్టమాంశ మేనుగ నిష్టా
ర్థాకృతియు నష్టపంచక
మాకర్ణిత మయ్యెఁ జెప్పు మాద్యుత్తరముల్. **8**

ఆది $\frac{3}{౨}$ **ఉత్తర** ౧ **గచ్ఛ** $\frac{౫}{౮}$ **లబ్ధధనం** $\frac{౧౦౫}{౧౨౮}$

ఇష్టధనం $\frac{౫}{౮}$ **లబ్ధాది** $\frac{౫}{౭}$ **లబ్ధోత్తర** $\frac{౧౬}{౨౧}$

ఏకార్ధము, ఆది a = $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

ఉత్తర ఏకము d = 1

పదం అష్టమాంశమేను n = $\frac{5}{8}$

ఇష్టార్థ కృతియు నష్టపంచకము s = $\frac{5}{8}$

ఇప్పుడు $S=(nd+2a-d)\frac{n}{2}$

$$=\left(\frac{5}{8}\times 1+2\times\frac{3}{2}-1\right)\times\frac{5}{16}=\frac{105}{128}$$

కాబట్టి $\frac{S}{s}=\frac{5}{8}=\frac{128}{105}=\frac{16}{21}$

$$A = a\frac{S}{s}=\frac{3}{2}\times\frac{16}{21} \ =\frac{8}{7}$$

$$D = d\frac{S}{s}=1\times\frac{16}{21} \ =\frac{16}{21}$$

వ. **ఇంక గచ్ఛానయనసూత్రము**

గచ్ఛను కనుగొనే సూత్రము

గీ. ***అష్టచయగుణమునపయి నాదిరెట్టి**
యుత్తరానశేషము కృతి నుత్తరంబు
చేసి మూలము గొని యాది దీసి యదియు
నర్ధితార్ధోత్తరాప్తంబు నైన గచ్ఛ. **9**

ఆది, పదాంతర సంకలితాలు ఇచ్చినప్పుడు పదసంఖ్య (గచ్ఛ)ను గణించే పద్ధతి.

పద్యభావం : "ఆదిని రెట్టింపు చేసి, ఉత్తరను తీసివేసి దాని వర్గును గ్రహించి, దానితో ఉత్తరమును ధనమును గుణించిన మొత్తమును ఎనిమిదితో గుణించి, కూడి కృతిమూలము గ్రహించి అందులో ఆదిని రెట్టించి, తీసివేసి ఉత్తరను కలిపి, ఈ మొత్తాన్ని రెట్టించిన ఉత్తరతో భాగిస్తే" వచ్చేఫలితం గచ్ఛ –

సంకేతాలతో $n=\frac{\sqrt{(2a-d)^2+8sd}-(2a-d)}{2d}$

దీనికి మూలసూత్రం $s=(nd+2a-d)\frac{n}{2}$

$$n^2d+(2a-d)n-2s=0$$

* ఆది రెట్టిచేసి యందుండి యుత్తరము దీసి దానివర్గువు గొని దానితో నుత్తరమును ధనమును గుణించిన మొత్తమును నెనిమిదితో గుణించి కూడి కృతిమూలము గొని యాది దీసి యర్ధించి వచ్చినమొత్తమును నుత్తరముచేతఁ బాల్గొనఁగా గచ్ఛ వచ్చును.

$$n = \frac{-(2a-d) \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8sd}}{2d}$$

ధనమూలాన్ని తీసుకొందాం.

$$n = \frac{-(2a-d) \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8sd}}{2d}$$

గమనిక : మహావీరాచార్యునికాలంలోనే వర్గసమీకరణం, దాని మూలాల ప్రస్తావన ఉన్నదని తెలుస్తున్నది.

క. ఆది ద్విపంచభాగము
పాదత్రయ ముత్తరంబు పరఁగఁగ ధనమున్
వేదశరభాగసప్తక
మాదరమున గచ్ఛఁ జెప్పు మది యెంత యగున్. 10

ఆది ౨/౫ ఉత్తర ౩/౪ గచ్ఛ ౭/౫౪ లబ్ధధనం ౫/౯

ద్విపంచభాగము ఆది = $\frac{2}{5}$ (=a)

పాదత్రయము ఉత్తర= $\frac{3}{4}$ (=d)

ధనము వేదశరభాగసప్తకము= $\frac{7}{54}$ (=s)

ఇక్కడ వేద, శర అంటే 54, ఇప్పుడు గచ్ఛ ఎంత?

సూత్రం $n = \frac{-(2a-d)\sqrt{(2a-d)^2 + 8sd}}{2d}$

$$= \frac{-\left(2 \times \frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right) + \sqrt{\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right)^2 + 8 \times \frac{7}{54} \times \frac{3}{4}}}{2 \times \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{5}{9}$$

సంకలనసూత్రము

క. సదృశహృతచ్ఛేదగుణితం
బది యాఛేదమునఁ గూడి యంశముతోడన్
విదితైకచ్ఛేదంబున
సదమలముగఁ గొన్న భిన్న సంకలిత మగున్. 11

భిన్నాలను కూడే విధానము వివరింపబడింది.

నేడు మనం భిన్నాలను కూడేటప్పుడు ఎట్లా క.సా.గు కట్టి, సంకలనం చేస్తామో అదే పద్ధతిని ఈపద్యంలో (అస్పష్టంగా) మల్లన తెలిపియున్నాడు –

"సమానముగ గ్రహింపబడిన ఛేదగుణితము ఛేదము నందు అంశముతో కూడి, గ్రాహ్యఛేద మొకదానితో సదమలముగా గ్రహింపబడినదో అది భిన్న సంకలితం ఔతుంది."

లవసంకలనసూత్రము

క. సమసంఖ్యాసప్తచ్ఛే
దము లన్యోన్యఘ్న హారతల మందిన నం
శముఁ గూడి తదైకచ్ఛే
దముఁ గొనఁగా భిన్నలవయుతమునఘన మగున్. 12

"నమసంఖ్య (?) సప్తసంఖ్యతో కల భేదములు పరస్పరం గుణకారభాగహారములంది – అంశముతో కూడి ఒకే ఛేదముగా పరిణమిస్తే అది భిన్నలవముతో కూడిన ఘనమవుతుంది."? ఇందలి స్పష్టతలోపాన్ని గమనించండి –

క. దళ దష్ట మష్ట మాష్టమ?
ములును జతుర్వింశభాగముం ద్ర్యంశల విం
శలసద్భాగంబులు నై
కలసినఁ దత్సంఖ్య యెంత గణితవిధిజ్ఞా. 13

దళదష్టము= $8\frac{1}{2}$, అష్టమాష్టమము= ? ($8\frac{1}{8}$?)

చతుర్వింశభాగంబు $\frac{1}{24}$

త్ర్యంశల వింశల= $\frac{20}{30}$ వీటి మొత్తమెంత? భిన్నాలను గురించిన స్పష్టతలేదు.

గీ. **అర్ధ షష్ఠ సూర్యాంశవింశాంశఖాగ్ని**
భాగ నయనాబ్ధి భాగషడ్బాణభాగ
నయనపర్వతభాగంబు నవతిభాగ
గగన శశి చంద్రభాగంబుఁ గలసి మఱియుఁ
బక్ష గుణ శశి భాగ షడ్బాణచంద్ర
భాగనయనాష్టహిమకరభాగములును
గగన శీతాంశు నేత్రభాగము ఖవార్ధి
పక్షషోడశభాగముపటల మెంత **14**

౧/౨ ౧/౬ ౧/౧౨ ౧/౨౦ ౧/౩౦ ౧/౪౨ ౧/౫౬ ౧/౭౨ ౧/౯౦ ౧/౧౧౦

౧/౧౩౨ ౧/౧౫౬ ౧/౧౮౨ ౧/౨౧౦ ౧/౨౪౦ ౧/౧౬ **లబ్ధరూపం** ౧

అర్ధ– $\frac{1}{2}$

షష్ఠ – $\frac{1}{6}$

సూర్యాంశ – $\frac{1}{12}$

వింశాంశ= $\frac{1}{20}$

ఖాగ్నిభాగ (ఖ=0, అగ్ని=3, భాగ=భిన్నం)= $\frac{1}{30}$

నయన అబ్ధిభాగ (నయన=2, అబ్ధి=4)= $\frac{1}{42}$

షట్‌బాణభాగ (షట్=6, బాణ=5)= $\frac{1}{56}$

నయనపర్వతభాగ= $\frac{1}{72}$

నవతిభాగ= $\frac{1}{90}$

గగనశశిచంద్ర భాగ= $\frac{1}{110}$

పక్షగుణ శశిభాగ= $\frac{1}{132}$

షట్‌బాణ చంద్రభాగ= $\frac{1}{156}$

నయన అష్టవేమకరభాగ= $\frac{1}{182}$

గగనశీతాంశు నేత్రభాగ= $\frac{1}{210}$

ఖవార్ధిపక్షభాగ= $\frac{1}{240}$

షోడశభాగం= $\frac{1}{16}$

ఈ పదునారు భిన్నాలను కూడండి –

వీటికి క.సా.గు కట్టి కూడటం శ్రమతో కూడుకున్నపని. అందువల్ల భిన్నాలహారాలలోని సామ్యతనుబట్టి, వర్గీకరించి ఆ తరవాత మొత్తాన్ని కనుక్కుందాము. మల్లన మొత్తానికి పటలమన్నమాట వాడాడు.

మనోరంజని నుండి :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{72}+\frac{1}{240}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{90}+\frac{1}{16}=\frac{37}{40}$$

& $$\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}+\frac{1}{182}+\frac{1}{210}+\frac{1}{90}+\frac{1}{16}=\frac{3}{40}$$

కాబట్టి ఇచ్చిన భిన్నాలమొత్తం $=\frac{37}{40}+\frac{3}{40}=\frac{40}{40}=1$

గీ. **బాణశశులు చంద్రబాహులు జలనిధి**
శశులు నాగశశులు శస్త్రగతులు
బాణవిషయములును బావకగుణములు
జలజభవగుణములుఁ జంద్రవిధులు
గగనబాణశశులుఁ గావ్యనయనగుణ
ములు శశీషు (సు) గుణములు నిధిగజ
శశులు రామగగసచక్షులు (బాణఖ)
....
గతులు సాయకాద్రి గతులు వసుగతిక్ష
ణములు వసధి తర్కనయనములును
బాణ పద్మగర్భ బాణముల్ విధిసంఖ్య
భేదపంక్తి యంత మాది దొడఁగి
రెండు నొకఁడు వరుస రెండేసి యయ్యెఁ ద
త్పంచమాంశయోగఫలముఁ జెపుమ. **15**

బాణశశులు= $\frac{1}{15}$

చంద్రబాహులు= $\frac{1}{21}$

జలనిధిశశులు= $\frac{1}{14}$

నాగశశులు= $\frac{1}{18}$

శస్త్రగతులు= $\frac{1}{35}$

బాణవిషయములు= $\frac{1}{55}$

పావకగుణములు= $\frac{1}{33}$

జలజభవగుణములు= $\frac{1}{39}$

చంద్రవిధులు= $\frac{1}{91}$

గగనబాణశశులు= $\frac{1}{150}$

కావ్యనయనగుణములు= $\frac{1}{325}$

శశీషు (సు)గుణములు= $\frac{1}{351}$

నిధిగజశశులు= $\frac{1}{189}$

రామగగనచక్షులు= $\frac{1}{203}$

బాణఖగతులు= $\frac{1}{305}$

సాయకాద్రిగతులు= $\frac{1}{375}$

వసుగతీక్షణములు= $\frac{1}{238}$

వనధి తర్కనయనము= $\frac{1}{264}$

బాణపద్మగర్భ బాణముల్ విధి సంఖ్య= $\frac{1}{9595}$

గమనిక: పద్యంలో మధ్యభాగంలో మూడు పాదాలు శిథిలమై పోయినట్లున్నది. బ్రహ్మశ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రిగారు దీనికి లఘువివరణ కూడా యివ్వలేదు – కాబట్టి సమస్యకు సాధన నివ్వలేదు –

*గీ. **ఈశుఁ బూజించె నొక్కమాహేశ్వరుండు**
గంధవర్గము విరచించి కనకసంఖ్య
షష్ఠదళనవ చతుస్సంఖ్య దగఁగ?
....

* ఇందు మొదటి రెండుపాదములు తేటగీతిపాదములు. కడపటి రెండును నాటవెలఁది పాదములు. ప్రతులన్నిట నిట్లే కలదు. రెండు భిన్నపద్యముల తునుకలగు నేమో!

వింశభాగపంచమాంశ సహితషష్ఠ
సంఖ్య యైన హేమసమితి యెంత. 16

ఇందులోనూ మూడుపాదాలు శిథిలమైపోయినట్లున్నది – ఉన్న పాదాలు కూడా ఒకే ఛందస్సులో లేదు – ఆటవెలది, తేటగీతాలమిశ్రమం. సాధననివ్వలేదు.

గీ. **ఏడు నెనిమిది తొమ్మిది యెసఁగఁ బదియుఁ**
బాదయుక్తంబు లైనయాభర్మములకుఁ
గలువపువ్వులు గొని నీలగళున కర్థిఁ
బూజ యొనరించె నాభర్మపుంజ మెంత. 17

$7\frac{1}{4}, 8\frac{1}{4}, 9\frac{1}{4}, 10\frac{1}{4}$ బంగారు నాణేలకు కలువ పుష్పాలు కొని శివుని కర్పించాడు ఒక భక్తుడు. అతడు చెల్లించిన బంగారు నాణేలెన్ని?

నాలుగుభిన్నాలను కూడి మొత్తం రాబట్టాలి.

అంటే $7\frac{1}{4} + 8\frac{1}{4} + 9\frac{1}{4} + 10\frac{1}{4} = 35$

ఇది సారసంగ్రహగణిత శాస్త్రంబునందు సప్తమ భిన్నసంకలితము సమాప్తము.

* * *

సారసంగ్రహగణితము

పావులూరి మల్లన (మల్లికార్జున) ప్రణీతము

భిన్నగణితము

వ్యుత్కలితము

వ. **అందష్టమవ్యుత్కలితజాతియందుఁ గరణసూత్రం బెట్టి దనిన;**

ఈ పరిచ్ఛేదంలో కవి భిన్నాల వ్యవకలనప్రక్రియను వివరిస్తున్నాడు.

గీ. ***పదయుతేష్టంబు నిష్టంబుఁ బ్రచయగుణము**
చేసి యుత్తరద్విగుణాదిశేష మందుఁ
గలిపి నిజపదార్థంబునఁ గదియఁ బెంప
ధరణిలో భిన్నవ్యుత్కళితంబు వచ్చు. 1

---

* 'గచ్ఛాధికేష్ట మిష్టం చయహత మూనోత్తరం ద్విహాదియుతమ్
శేషేష్టపదార్ధ గుణం వ్యుత్కలితం స్వేష్టవిత్తం చ, అని మూలము.

మూలమును బట్టి వ్యుత్కలితధనముఁ దెచ్చుటకు సూత్రము:

గచ్ఛ కలిపిన యిష్టగచ్ఛను, నిష్టగచ్ఛను బ్రత్యేకము ప్రత్యేకముగా నుత్తరచే గుణించి యామొత్తమునుండి యుత్తరను దీసి, యాది ద్విగుణించి యందుఁ గలిపి యారెండు మొత్తములను శేషగచ్ఛతోడను నిష్టగచ్ఛతోడను గుణించి యర్ధించిన వ్యుత్కలితధనమును నిష్టధనమును వచ్చును.

ఆంధ్రీకరణమున నీసూత్రము కొంతమార్పుతో నున్నది. సూత్రపాఠము వేఱుగా నున్నను ఫలితార్థము సమము.

మల్లన సూత్రమునకు వివరణము:

గచ్ఛ కలిపిన యిష్టగచ్ఛను, నిష్టగచ్ఛను బ్రత్యేకము ప్రత్యేకముగా నుత్తరచే గుణించి యా మొత్తముతో – ఆది రెట్టించి యందుండి యుత్తర దీసివేయగా వచ్చిన మొత్తమును గలిపి యారెండు మొత్తములను శేషగచ్ఛతోడను, నిష్టగచ్ఛతోడను గుణించి యర్ధించిన వ్యుత్కలితధనమును, నిష్టధనమును వచ్చును.

పరికర్మగణితభాగములోని వ్యుత్కలితసూత్రమును నీ సూత్రమును నించుమించుగా నొకటే యగును.

ఈ పద్యతాత్పర్యం కొంత డొంకతిరుగుడుగా ఉంటున్నది. అందువల్ల సంకేతాలను ఉపయోగించి దీనికి వివరణ తెలుసుకుందాము. పరికర్మగణితవిభాగంలో దీని ప్రస్తావన ఇదివరకే వచ్చింది –

పూర్ణశ్రేఢిసాధారణ రూపం:

$$a, a + d, a + 2d, \dots a + (n-1)d, a + nd, \dots a + (N-1)d \quad -(1)$$

(1)లో $N(> n)$ పదాలున్నాయి –

ఇందులో ఇష్టశ్రేఢికి n పదాలు.

ఇష్టశ్రేఢికి, పూర్ణశ్రేఢికి a, d లు సమానం

పూర్ణశ్రేఢి సంకలితం= S_N

ఇష్టశ్రేఢి సంకలితం= S_n

వ్యుత్కలితం= పూర్ణశ్రేఢి సంకలితం – ఇష్టశ్రేఢి సంకలితం

$$= S_N - S_n = S_r$$

ఇప్పుడు పద్యతాత్పర్యం చూద్దాం : పూర్ణశ్రేఢి, ఇష్టశ్రేఢి, పదసంఖ్యల మొత్తాన్ని ఒకటి తగ్గించి, పదాంతరం d తో గుణించి, రెండింతల ఆదిపదం అంటే 2a కూడాలి. వచ్చిన దాన్ని, పదసంఖ్యల తేడాలో సగంతో గుణిస్తే రెండురకాల (అంక, గుణ) శ్రేఢులకు వ్యుత్కలితం లభిస్తుంది.

$$Sr = [a + nd + a(N-1)d]\left(\frac{N-n}{2}\right)$$

$$= [2a + (N + n - 1)d]\left(\frac{N-n}{2}\right)$$

“ఈ సమీకరణాన్ని మల్లన తన పద్యంలో సూటిగా సూత్రీకరించాడు.”

క. **మొద లొకఁ డుత్తర మొక్కఁడు**
పద మర్ధం బిష్టగచ్ఛ పాదము కాఁగా

విదితవ్యుత్కళితంబుగఁ
గదియఁగ శేషంబుఁ జెప్పు గణితవిధిజ్ఞా. **2**

ఆది ౧ ఉత్తర ౧ గచ్ఛ ౧/౨ ఇష్టగచ్ఛ ౧/౪ లబ్ధశేషధనము ౭/౩౨
ఇష్టధనము ౫/౩౨

ఆది 1, ఉత్తర 1, పదం (గచ్ఛ) $\frac{1}{2}$

ఇష్టగచ్ఛ $\frac{1}{4}$ అయితే ఇష్టధనము, శేషధనము చెప్పండి –

సంకేతాలతో a=1, d=1, N = $\frac{1}{2}$

n= $\frac{1}{4}$ అయితే S_r ఎంత?

$$S_r = [2a + (N + n - 1)d]\left(\frac{N-n}{2}\right)$$

$$= \left[2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1\right)1\right]\frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})}{2}$$

$$= \frac{7}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{32}$$

ఇష్టధనము

$$S_n = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2} = [2 + \left(\frac{1}{4} - 1\right)\frac{1}{4 \times 2} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{32}$$

గమనిక : N, nలను భిన్నాలుగా తీసుకోవడం గమనించండి.

క. **ఆదియు నర్ధము ప్రచయము**
పాదము పాదత్రయంబు పద మిష్టంబున్
బాదము తద్వ్యుత్కళితము
నాదరమున శేషధనము నది యెంత యగున్ **3**

ఆది ౧/౨ ఉత్తర ౧/౪ గచ్ఛ ౩/౪ ఇష్టగచ్ఛ ౧/౪ లబ్ధధనము ౧/౪ ఇష్టధనము ౧౩/౧౨౮

ఆది $a = \frac{1}{2}$

ప్రచయము, ఉత్తర $d = \frac{1}{4}$

పదము (గచ్ఛ) పాదత్రయంబు $N = \frac{3}{4}$

ఇష్టపాదం $n = \frac{1}{4}$ అయితే శేషధనము

ఇష్టధనము లెంతెంత?

$$S_N = \{2a + (N-1)d\}\frac{N}{2}$$

$$= \left\{2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} - 1\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{3}{8} = \frac{45}{128}$$

$$S_n = \{2a + (n-1)d\}\frac{n}{2}$$

$$= \left\{2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{8} = \frac{13}{128}$$

శేషధనము : $S_{N-}S_n = \frac{45}{128} - \frac{13}{128} = \frac{32}{128} = \frac{1}{4}$

ఇష్టధనము$= S_n = \frac{13}{128}$

గీ. అర్ధ మాది పంచమాంశ యుత్తరము త్రి
భాగయుగ్మ మయ్యెఁ బరఁగ గచ్ఛ
యష్టమంబు నేను నైనఁ దద్వ్యుత్కళి
తంబుచేత నైనధన మదెంత. 4

ఆది $\frac{౧}{౨}$ ఉత్తర $\frac{౧}{౫}$ గచ్ఛ $\frac{౨}{3}$ ఇష్టగచ్ఛ $\frac{౫}{౮}$ లబ్ధవ్యుత్కలితధనము $\frac{౧౨౭}{౫౭౬౦}$

ఇష్టధనము $\frac{౩౭}{౧౨౮}$

ఆది అర్థం అంటే $a = \frac{1}{2}$

ఉత్తర $d = \frac{1}{5}$

గచ్ఛత్రిభాగయుగ్మం $N = \frac{2}{3}$

ఇష్టగచ్ఛ $n = \frac{5}{8}$ అయితే

శేషధనము, ఇష్టధనము లెంతెంత?

శేషసంకలితం $S_r = [2a + (N+n-1)d]\left(\frac{N-n}{2}\right)$

$$= \left[2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{8} - 1\right) \times \frac{1}{5}\right]\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{8}\right)$$

$$= \left[1 + \frac{7}{24} \times \frac{1}{5}\right] \times \frac{1}{48}$$

$$= \frac{127}{120} \times \frac{1}{48} = \frac{127}{5760}$$

ఇష్టధనము $S_n = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2}$

$$= \left\{2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{8} - 1\right)\frac{1}{5}\right\}\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}$$

$$= \frac{37}{128}$$

శేషగచ్ఛాద్యానయన సూత్రము

శేషశ్రేఢిలో ఆదిని తెలుసుకోవడానికి సూత్రం

క. *ప్రచయార్ధాదుల శేషము
ప్రచయగుణం బైనయిష్టపదమున నర్ధ

*ప్రచయార్ధోనః ప్రభవో యుత శ్చయఘ్నేష్టపదచయార్ధాభ్యామ్
శేషస్య పదస్యాది శ్చయస్తు పూర్వోక్త ఏవ భవేత్ – అని మూలము.

మల్లన పద్యమునకు వివరణము:

ఆదినుండి యుత్తరను సగము చేసి తీసి యాలెక్కతో ఇష్టగచ్ఛను ఉత్తరచే గణించి కలిపి దానితో నుత్తర సర్ధించి కలిపిన శేషగచ్ఛకు ఆది వచ్చును.

పరికర్మగణితములో వ్యుత్కలిత జాతిలోని శేషగచ్ఛాద్యానయన సూత్రమును, నీ సూత్రమును బర్యవసానమున నొకటియే యగును.

ప్రచయమునఁ గూడి భిన్నము
నచలిత మగుశేషగచ్ఛ కది యాది యగున్. 5

పరికర్మగణితంలో ఈ సూత్రం ఇదివరకే వివరింపబడింది.

ఇష్టశ్రేఢి చివరిపదం a+(n-1)d

కాబట్టి దీని తరువాతి పదం a+nd శేషశ్రేఢికి ఆది అంటే మొదటి పదం A.

క. **ఆది యొకఁ డుత్తరము నొక్కఁ డర్ధ మయ్యె**
గచ్ఛ పాదాంశ మగు నిష్టగచ్ఛ యందుఁ
దగినధనముతో వ్యుత్కళితమున కైన
శేషగచ్ఛకు నగు నాది చెప్పు[1] 'మాకు. 6

ఆది ౧ ఉత్తర ౧ గచ్ఛ ౧/౨ ఇష్టగచ్ఛ ౧/౪ శేషగచ్ఛకు లబ్ధాది ౫/౪

ఆది $a = 1$, ఉత్తర $d = 1$, గచ్ఛ $N = \frac{1}{2}$ ఇష్టగచ్ఛ $n = \frac{1}{4}$ అయితే శేషగచ్ఛకు ఆది ఎంత? $A = a + nd = 1 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$

క. **ఆది యర్ధముత్తరము, పాదాంశ మైన**
గచ్ఛ పాదత్రయం బిష్టగచ్ఛ పాద
మైన నందుఁ దద్వ్యుత్కళితార్ధమునకు
శేషగచ్ఛాది యేర్పడఁ జెప్పు మాకు. 7

ఆది ౧/౨ ఉత్తర ౧/౪ గచ్ఛ 3/౪ ఇష్టగచ్ఛ ౧/౪ శేషగచ్ఛ ౧/౨ లబ్ధాది ౯/౧౬

ఆది $a = \frac{1}{2}$, ఉత్తర (పాదాంశం) $d = \frac{1}{4}$ గచ్ఛ పాదత్రయం $N = \frac{3}{4}$

ఇష్టగచ్ఛ $n = \frac{1}{4}$ A ఎంత? పదసంఖ్య ఎంత?

---

1 మయ్యె.

$$A = a + nd = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

పదసంఖ్య $= N - n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (శేషగచ్ఛ)

గీ. **అర్ధపంచమంబు లాద్యుత్తరంబులు**
ద్విత్రిభాగ మయ్యెఁ దెలియ గచ్ఛ
యిష్ట మష్టమాంశ మిషుసంఖ్య చయమును
శేషగచ్ఛ కాదిఁ జెప్పు మెంత. 8

ఆది ౧/౨ ఉత్తర ౧/౫ గచ్ఛ ౨/3 ఇష్టగచ్ఛ ౫/౮ శేషగచ్ఛ ౧/౨౪ లబ్ధాది ౫/౮

ఆది అర్ధం $a = \frac{1}{2}$

ఉత్తరం పంచమంబు $d = \frac{1}{5}$

గచ్ఛ ద్విత్రిభాగం $N = \frac{2}{3}$

ఇష్టగచ్ఛ = ఇష్టపదం అష్టమాంశమిషు $n = \frac{5}{8}$

శేషగచ్ఛకు ఆది $A = a + nd$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{8}$$

పదసంఖ్య $= N - n = \frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{1}{24}$ (శేషగచ్ఛ)

[1]వ్యవకలనసూత్రము

భిన్నాల తీసివేతకు సూత్రం.

క. **ఛేదరహితమున నేక**
చ్ఛేదముఁ గొని యంశగుణముఁ జేయుచు నంశం
బాదరికఁ [2]బుచ్చి భిన్న
ప్రాదుర్భావంబుఁ గూడి పరఁగఁగఁ జెపుమా. 9

---

1. వ్యుత్కళితసూత్రం బెట్టి దనిన
2. బుచ్చ భిన్నో - త్పాదవ్యుత్కళిత మదియుఁ బరఁగఁగ నయ్యెన్.

కవి హృదయం స్పష్టంగా తెలియకపోవడంవల్ల, ఈ పద్యంలోని భావం మాత్రం సంకేతాలతో $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(ad-bc)}{bd}$ అని చెప్పవచ్చు.

గీ. ధూపగంధపుష్పదీపంబులకు మాడ
పాదదళిత వింశభాగపంచ
మాంశకముల శూలి నర్చింప నొక్కరుఁ
డిచ్చె దానిశేష మెంత చెపుమ. 10

౧/౪ ౧/౨ ౧/౨౦ ౧/౫ ౧ **శేషము** ౦

శివుని పూజకు ఒకడు తన వద్దనున్న ఒక మాడలో $\frac{1}{4}$ భాగాలు ధూపానికి, $\frac{1}{2}$ భాగాలు గంధానికి, $\frac{1}{20}$ భాగాలు పుష్పాలకు, $\frac{1}{5}$ భాగాలు దీపారాధనకు ఖర్చుపెట్టాడు. ఇంకా అతని వద్ద మిగిలి ఉన్న ద్రవ్యమెంత?

ఖర్చుమొత్తం $=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$

$$=\frac{5+10+1+4}{20}=\frac{20}{20}=1$$

కాబట్టి అతని వద్ద ఏమీ మిగలలేదు.

గీ. పాదపంచమాంశభాగంబులును దశ
మాంశకత్రయంబు వింశసప్త
భాగమును ద్విసప్తభాగంబు రెంటిలో
హీనమైన శేషమెంత చెపుమ. 11

౧/౪ ౧/౫ ౩/౧౦ ౭/౨౦ ౨/౭ ౨ **శేషము** ౪౩/౭౦

పాద= $\frac{1}{4}$, పంచమాంశ= $\frac{1}{5}$, దశమాంశకత్రయం= $\frac{3}{10}$ వింశసప్తభాగ $=\frac{7}{20}$ ద్విసప్తభాగ= $\frac{2}{7}$లను 2 లో హీనమైతే (తీసివేస్తే) ఎంత మిగులుతుంది.

$$2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{7}{20}+\frac{2}{7}\right)$$

$$=2-\frac{97}{70}=\frac{43}{70}$$

తే.గీ. అరయ నేకార్ధమును దృతీయార్ధఫలము
పాదనవసప్తకంబు త్రిభాగయుగ్మ
సప్తమద్వికమును మఱి సప్తమద్వి
నవమభాగంబు లేర్పడ నయముతోడ
రెండుమాడలలోఁ బుచ్చి ఖండచంద్ర
మౌళిఁ బశువతిఁ బూజింప మహితమైన
గంధపుష్పాదివస్తునికాయమునకు
నిచ్చెగా దానిశేష మదెంత చెపుమ. 12

౧ ౧/౨ , ౧ ౧/౩ ౨ , ౧ ౭/౪ ౯ , ౨ ౨/౩ ౭ , ౨ ౧/౭ ౯ ౨ **శేషము** ౨౧౧/౨౫౨

తనవద్ద ఉన్న రెండు మాడల ద్రవ్యంతో ఒక శివారాధకుడు వివిధ పూజాసామగ్రిని ఈ క్రింది విధంగా కొన్నాడు – మొదట ఏకార్ధమిచ్చాడు అంటే $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

తరువాత తృతీయ అర్ధఫలంయిచ్చాడు అంటే $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

ఆ తరువాత పాద నవ సప్తకం అంటే $\frac{1}{4}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{36}$

పిమ్మట త్రిభాగయుగ్మసప్తమద్వికం= $\frac{2}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{21}$

చివరగా సప్తమ ద్వినవము అంట $\frac{2}{7}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{63}$

అతని వద్ద ఎంత సొమ్ము మిగిలి ఉన్నది?

ఖర్చుపెట్టినది $= \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{36} + \frac{4}{21} + \frac{2}{63} = \frac{25}{12}$

మిగిలినది $= 2 - \frac{25}{12} = -\frac{1}{12}$?

బ్రహ్మశ్రీ ప్రభాకరశాస్త్రిగారి సాధనలో శేషం $\frac{211}{252}$ అని ఉన్నది?

తే.గీ. అవని నేకార్ధమును దృతీయాంశమును ద
ళమును దద్విభాగార్ధఫలము దశాంశ
............పంచకముఁ దగఁ బంచ
మార్ధమును బుచ్చ నేకార్ధ మయ్యె నెంత. 13

?

పద్యం అసంపూర్ణం

ఉన్న పద్యభాగంలో భావం.

ఏకార్ధము $1\frac{1}{2}$

తృతీయాంశము $\frac{1}{3}$

దళమును $\frac{1}{2}$

ద్విభాగార్ధఫలము $2\frac{1}{2}$

దశాంశ $\frac{1}{10}$

............?

పంచకము $\frac{1}{5}$

వీటిని తీసివేయగా, దేనినుండో తెలియదు.

మిగులునది ఏకార్ధము $\frac{1}{2}$ అయితే మొదట ఎంత మొత్తముండినది?

– అసంపూర్ణ దత్తాంశం కాబట్టి సాధన కుదరదు.

తే.గీ. పాదసహితాష్టకంబు షడ్భాగమిశ్ర
పంచసంఖ్యయు ద్వాదశభాగయుక్త
షష్ఠమును మఱి యర్ధమిశ్రత్రికంబు
నిర్వదేనింటి [1]లోఁ బుచ్చ నెంత మిగులు. 14

౮ ౧/౪ ౫ ౧/౬ ౬ ౧/౧౨ ౩ ౧/౨ ౨౫ **శేషము** ౨

పాదసహిత అష్టకము $= 8\frac{1}{4}$

షడ్భాగ మిశ్రపంచకము $= 5\frac{1}{6}$

ద్వాదశభాగ యుక్తషష్ఠం $= 6\frac{1}{12}$

అర్ధమిశ్ర త్రికం $= 3\frac{1}{2}$

వీటిని యిరవదేనింట అనగా 25లో నుండి తీసివేయగా శేషమెంత?

నాలుగుభిన్నాల మొత్తం $= 8\frac{1}{4} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{12} + 3\frac{1}{2}$

$$= (8+5+6+3) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)$$
$$= 22 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$$
$$= 22 + 1 = 23$$

దీనిని యిరదేనింట తీసివేయగా $= 25 - 23 = 2$ మిగులుతుంది.

తే.గీ. అష్టమాంశాన్వితాష్టషష్ఠాంశసహిత
షట్కమును ద్వాదశాంశమిశ్రద్వికంబు
దిగ్గజాంశపంచకయుతత్రికముఁ గూడి
యిరువదింటిలోఁ బుచ్చఁగా నెంత మిగులు. 15

౮ ౧/౮ ౬ ౧/౬ ౨ ౧/౧౨ ౩ ౫/౮ ౨౦ **శేషములేదు.**

---

[1] తో

అష్టమాంశ అన్విత అష్టము $= 8\frac{1}{8}$

షష్ఠాంశ సహితషట్కము $= 6\frac{1}{6}$

ద్వాదశాంశ మిశ్రద్వికం $= 2\frac{1}{12}$

దిగ్గజాంశ పంచకయుత త్రికము $= 3\frac{5}{8}$

ఈ నాలుగు భిన్నాలనుకూడి 20లో తీసివేయగా శేషమెంత?

నాలుగు భిన్నాలమొత్తం $= \left(8\frac{1}{8} + 6\frac{1}{6} + 2\frac{1}{12} + 3\frac{5}{8}\right)$

$$= (8+6+2+3) + \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)$$
$$= 19 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$$
$$= 19 + 1 = 20$$
$$= 20 - 20 = 0$$

*..................................

....

....

పాతము

సప్తమస్వదళితచరణవిహీనవు
షష్ఠిహీన మైనసహిత మొకఁడు
నేర్పడంగ వీని నేకార్ధసంఖ్యతోఁ
బుచ్చ శేష మైనపురులు చెపుమ. **16**

?

*ఇక్కడ గ్రంథపాతము కలదు. ఉపలబ్ధ పద్యభాగమును బట్టి చూడనిది మూలములో భిన్నగణితమునందలి 131-వ శ్లోకమునకుఁ దెలిఁగింపుగాఁ దోఁచుచున్నది.

సప్తమ స్వదళిత $= 7\frac{1}{2}$

చరణవిహీన షష్టిహీనమైన $= 5\frac{3}{4}$

సహితమొకడు 1 ని

ఏకార్థసంఖ్యతో అంటే $1\frac{1}{2}$ తో బుచ్చగా అంటే $1\frac{1}{2}$ నుండి తీసివేయగా శేషమెంత?

ఇక్కడ $1\frac{1}{2}$ నుండి తీసివేయవలసిన సంఖ్య $1\frac{1}{2}$ కంటే పెద్దది. గనక జవాబు ఋణసంఖ్య. మల్లన నాటికి ఇట్లాంటి వ్యుత్కలనాలు సాధ్యమా? ఈ పద్యంలోనూ అస్పష్టత, సందిగ్ధత చోటు చేసుకున్నాయి.

ద్వాదశాంశాలి యేడింటఁ దగిలి[1] కదిసి
భాసురం బైనభాగానుబంధ మొకఁడు
పరఁగ నర్ధంబు నిజగుణభాగ[2] హార
పంచవింశక నవమాంశ పర్వతాంశ
.................విహీనమ్ములు వరుసనైన
నదియు షష్ఠపంచోత్తరం బైన నెంత ?

ద్వాదశాంశాలి ఏడింఁదగిలి $= 7\frac{1}{2}$

భాగానుబంధమొకడు $= 1\frac{1}{2}$

అర్థంబు $= \frac{1}{2}$

పంచవింశక నవమాంశ పర్వతాంశ $= 7\frac{9}{25}$

షష్ఠపంచోత్తరంబ $= 6\frac{1}{2}$

సమస్య ఫలానా అని తెలయడం లేదు.

ఇది సారసంగ్రహగణితశాస్త్రంబునందు అష్టమ భిన్నవ్యుత్కలితము సమాప్తము.

* * *

1. కదలి. 2. పాద.

SRI VENKATESWARA ORIENTAL INSTITUTE, TIRUPATI
Price list of Publications

General Editor: PROF. P.V.RAMANUJASWAMI, M.A., *Director.*

Sri Venkatesvara Oriental Series : Rs. A

1. **Sri Venkateswara Kavya Kalapa,** (Sanskrit) Ed. by Sri D.T.Tatacharya, M.O.L. 4 0
2. **History of Tirupati,** Volume II (English) by Dr. S. Krishnaswami Aiyangar, M.A., Ph.D. (Out of Stock)
3. **A Glossary of Indian Philosophical Terms,** (Sanskrit-English) by Sri C.V.Sankara Rao, M.A. .. 1 8
4. Psychology, (Telugu) by Dr. K. C. Varadachari, M.A., Ph.D. (Out of Stock)
5. **Isavasyopanishad Bhashya,** of Venkatanatha, (Sanskrit-English) Ed. & Translated by Dr. K.C. Varadachari, M.A., Ph.D. & Sri D.T.Tatacharya, M.O.L. (Out of Stock)
6. **Samurtarchanadhikarana (Atri Samhita),** (Sanskrit) Ed. by Mr. Raghunatha Chakravarthi Bhattacharya & Sri M.Ramakrishna Kavi, M.A. 6 0
7. **Suvarnasaptati Sastra.** (Sanskrit) Reconstructed from the Chinese & Ed. by Sri N.Aiyaswami Sastri... 3 0
8. **Kenopanishad Bhashya,** by Rangaramanuja (Sanskrit-English) Ed. & Translated by Dr. K.C.Varadachari, M.A., Ph.D. & Sri D.T.Tatacharya, M.O.L. 1 0
9. **Tirukkural-Kamattuppal,** with the commentaries of Kalingar and Paripperumal (Tamil) Ed. by Sri T.P.Palaniappa Pillai, B.O.L. 2 0
10. **Sri Venkateswara Vachanamulu,** (Telugu) Edited by Sri V.Prabhakara Sastri 1 8
11. **Sringarasankirtanamulu,** Vol.IV of Tallapaka Annamacharyulu (Telugu) Ed. by Sri V.Prabhakara Sastri 2 0

Rs. A

12. **Kasyapa-Jnanakanda (Kasyapa Samhita),** (Sanskrit) Ed. by Sri R.Parthasarthi Bhattachar ... 3 0
13. **Andhra-Kuvalayanandamu** (Telugu) by Ubhaya bhasha Pravina Sri K.Subrahmanya Sastri ... 3 12
14. **Tirukkural-Porutpal,** with the commentaries of Kalingar and Paripperumal (Tamil) Ed. by Sri T.P. Palaniappa Pillai, B.O.L. 4 0
15. **Kathopanishad Bhashya,** of Rangaramanuja (Sanskrit-English) Ed and Translated by Dr.K.C.Varadachari, M.A., Ph.D. and Sri D.T.Tatacharya, M.O.L. ... 3 12
16. **Sri Venkatesvara Laghu Kritulu,** (Telugu) Edited by Sri V.Prabhakara Sastri 1 8
17. **Annamacharya Charitramu,** (Telugu) Edited by Sri V.Prabhakara Sastri. 2 8
18. **Tiruvengada Sthalapuranam,** (Tamil) with prose supplement Ed. by Sri T.P.Palaniappa Pillai, B.O.I... 1 8
19. **Alankarasangraha, of Amritanandayogi,** (Sanskrit) Edited by Sri P. Balakrishnamurti, M.A. 3 4
20. **Subhadra Kalyanamu,** (Telugu) by Tallapaka Timmakka, Ed. by Sri V.Prabhakara Sastri ... 0 12

20a. **Sankaravilasam,** (Tamil) Ed. by Sri T.P.Palaniappa Pillai, B.O.L. 3 4

21. **Janasrayi,** (Sanskrit) Ed. by Sri M. Ramakrishna Kavi, M.A. 1 0
22. **Adhyatmasankirtanalu,** Vol.V. of Tallapaka Annamacharyulu (Telugu) Ed. by Sri V. Prabhakara Sastri 3 4
23. **Tiruvengada Ula,** (Tamil) Ed. by Sri T.P.Palaniappa Pillai, B.O.L. 1 8

		Rs.	A
24.	**Adhyatmasankirtanalu,** Vol.VI of Tallapaka Annama charyulu (Telugu) Ed. by Sri A.V.Srinivasachari	2	0
25.	**Prasnopanishad Bhashya,** of Rangaramanuja (Sanskrit-English) Ed. and Translated by Dr. K.C.Varadachari, M.A., Ph.d). and Sri D.T.Tatacharya, M.O.L.	2	12
26.	**Sri Venkateswara Stuti Ratnamala,** (Telugu) Ed. by Sri V.Prabhakara Sastri	1	2
27.	**Dharmasangraha,** (Sanskrit) Ed. by Prof. P.V.Ramanu jaswami, M.A.	2	0
28.	**Nipatavyayopasargavritti,** (Sanskrit) Ed. by Vidya Pravina Sri A. Somneswarasarma, P.O.L. ...	2	0
29.	**Adhyatmasankirtanalu,** Vol. VII of Tallapaka Annama charyulu (Telugu) Ed. by Sri R. Anantakrishna Sarma & Sri A.V.Srinivasachari ...	3	0
30.	**Bharata Kosa,** (Sanskrit) Ed. by Sri.M.Ramakrishna Kavi, M.A. ...	22	0
31.	**Adhyatmasankirtanalu,** Vol. VIII of Tallapaka Annamacharyulu (Tel.) Ed. by Sri R.Anantakrishna Sarma & A.V.Srinivasachari ...	3	0
32.	**Raghuvamsa,** (Cantos 1 & 2), Translated into Tamil and Ed. by Sri D. T. Tatacharya, M.O.L.	...	...
33.	**Adhyatmasankirtanalu,** Vol.IX of Tallapaka Annama charyulu (Tel.) Ed. by Sri R.Anantakrishna Sarma	3	0
34.	**Sri Venkateswara Stuti Ratnamala,** (Tel.) Vol.II Ed. by Sri K.Ramakrishniaya, M.A. ...	2	0
35.	**Adhyatmasankirtanalu,** Vol.X of Tallapaka Annamacharyulu (Tel.) Ed. by Sri R.Anantha krishna Sarma ...	...	...

		Rs.	A
36.	**Chandogyopanishad-Bhashya,** of Rangaramanuja Part I-Text with Sanskrit Introduction & Notes by Uttamur Sri T.Viraraghavacharya ...	8	0
37.	**Sahityasara,** (Sanskrit) by Somesvara Kavi, Ed. by Si M. Ramakrishna Kavi, M.A. with Introduction by Vidya Pravina Sri A. Someswarasarma, P.O.L. ...	-	-

Sri Venkatesvara Oriental Institute Studies :

1.	**Theory of Knowledge in the Philosophy of Sri Ramanuja** (English) by Dr. K. C. Varadachari, M.A. Ph.D.	3	0
2.	**Rupakaparisuddhi** (Sanskrit) by Sri D. T. Tatacharya, M.O.L.	1	0
3.	**Idea of God** (English) by Dr. K. C. Varadachari, M.A., Ph. D.	3	0
4.	**Sahityavimarsa** (Sanskrit) by Vidya Pravina Sri A. Someswarasarma, P.O.L.	2	0
5.	**The Dharmasutras & the Dharmasastras** (English) by Dewan Bahadur K.S.Ramaswami Sastri, B.A.,B.L.	0	12
6.	**Virasaiva Literature,** (Telugu) by Sri S. Rama krishna Sastri, M.A., B.O.L. ...	5	0

For copies of the above apply to:

THE DIRECTOR,
S. V. Oriental Institute, TIRUPATI,
(Chittoor Dist.) South India.